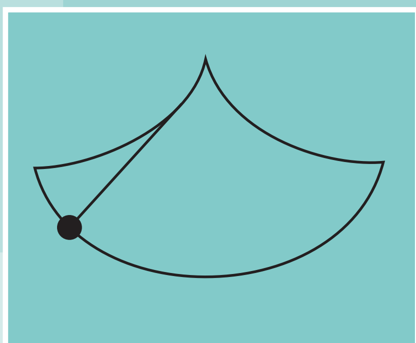
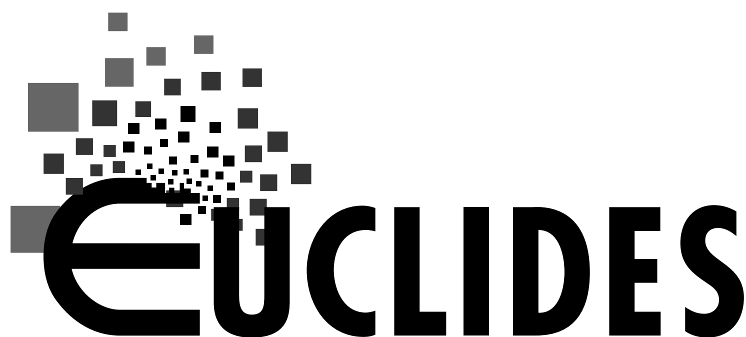
Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 70
1994-1995 januari
4





Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per cursusjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs. M.C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam.
Voor meer informatie: zie 'Richtlijnen voor auteurs' op bladzijde 130.
De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 2 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter
dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-539985.
Secretaris
R.J. Bloem, Kornoelje 37, 3831 WJ Leusden
Ledenadministratie
F.F.J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218; fax 076-653218.
Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 65,00 per verenigingsjaar; voor studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de VVWL *f* 47,50; contributie zonder Euclides *f* 40,00.
Opgave van nieuwe leden aan de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

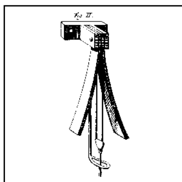
Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 71,00. Een collectief abonnement (6 exemplaren of meer) kost per abonnement *f* 48,00. Opgave bij de ledenadministratie (adres: zie boven).
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgiro hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer.
Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar.
Annuleringen dienen vóór 1 juli te worden doorgegeven aan de ledenadministratie.
Losse nummers *f* 12,50.

Advertenties

Advertenties sturen naar:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4, 7061 WR Terborg; tel. 08350-24337
of naar:
L. Bozuwa, Merwekade 90, 3311 TH Dordrecht; tel. 078-145522.

Inhoud







Huygens' Isochrone Slinger

Henk Broer

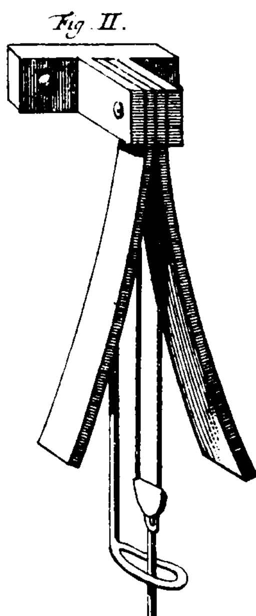
1 Inleiding

Een groot deel van zijn leven was Christiaan Huygens (1629-1695, dus precies 300 jaar geleden overleed hij) bezeten van het slingeruurwerk. In het bijzonder geldt dit voor de isochrone slinger, getuige onder andere zijn in 1673 verschenen 'Horologium Oscillatorium' [10]. Zoals wellicht bekend, rust dit alles op de meetkundige eigenschappen van de cycloïde.
In dit artikel wordt een wiskundige parafrase gegeven die geheel in 'hedendaagse' termen gesteld is, waarbij overigens slechts elementaire differentiaal- en integraalrekening gebruikt wordt. Deze techniek begon pas aan het einde van Huygens' leven opgeld te doen en in [10] zoekt men hier dan ook vergeefs naar. Zo resteert natuurlijk wel de vraag hoe Huygens [10] het zelf allemaal heeft gevonden. Voor een prachtige beschrijving hiervan zij verwezen naar Yoder [13].

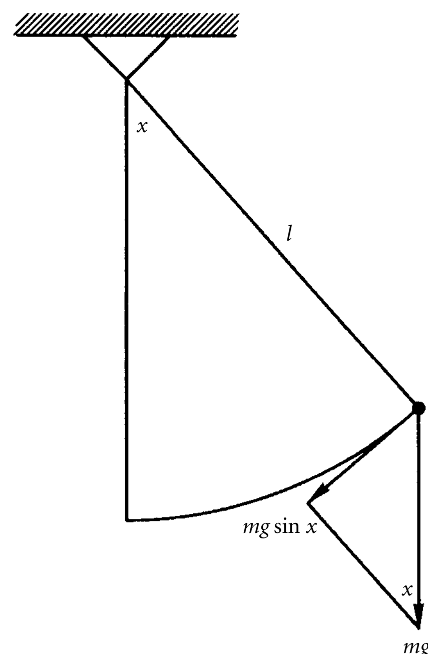
1.1 Achtergrond

Een belangrijk maatschappelijk probleem uit de 17de eeuw was de lengtebepaling op zee, zie onder andere Mahoney [11]. Door een zonnetje te schieten bepaalde men het moment van 12 uur plaatselijke tijd en men vergeleek dit met, zeg, de Greenwich-tijd. Is het tijdsverschil T uren, dan bedraagt het overeenkomstige lengteverschil $\frac{360}{24} \times T = 15T$ graden. Het probleem hierbij is dat er aan boord een klok moet zijn die deze referentietijd aangeeft. Uiteraard moet deze klok dan zeer gelijkmatig lopen. Nu geldt dat de slingertijd toeneemt met toenemende amplitudo, reden waarom een traditioneel slingeruurwerk op den duur onbetrouwbaar wordt.

Grofweg komt Huygens' correctie erop neer dat hij het slingertouwtje laat afwikkelen langs metalen 'wangen', waardoor de slingerlengte bij toenemende uitwijking iets wordt verkort. De wangen zijn aangebracht aan weerszijden van de klokkeslinger, zie figuur 1a, overgenomen uit [10]. Dit geheel compenseert het genoemde effect van toename van de slingertijd bij toenemende amplitudo. Een dergelijke contraptie is aangebracht bij verschillende klokken uit die tijd, zoals bijvoorbeeld te zien in het Museum Boerhaave te Leiden. Ook zij verwezen naar verschillende uitgaven van de Mededelingen Museum Boerhaave, zie onder andere [6,9], maar vooral [12]. Verdere achtergrondinformatie vindt men bijvoorbeeld bij Galileï [7] en Goldstine [8], of ook bij Andriesse [1].



Figuur 1a 'Wangen' ter weerszijden van de klokkeslinger



Figuur 1b Schematische voorstelling gewone slinger

1.2 Over de opzet

We zullen in §5 zien dat de precieze vorm van de wangen zodanig is dat de slingermassa een voorgeschreven cycloïdale kromme doorloopt. Hierbij is het meetkundige begrip *evoluut* centraal.
Waarom dan een cycloïde? Wel, het blijkt dat juist langs deze kromme de oscillaties isochroon verlopen, dus zodanig, dat de periode niet meer van de amplitudo afhangt. In §4 tonen we dit aan door verband te leggen met de *harmonische oscillator.*

De paragrafen 2 en 3 vormen hierop een inleiding. We presenteren eenvoudige oscillatoren als de veer en de slinger, maar geven ook een algemener perspectief. Belangrijke hulpmiddelen zijn onder andere *lijnelementenveld* en *faseportret.* Voor meer achtergrond zie onder andere Broer, Epema en Kuipers [4].

Opmerking. Uiteindelijk bleek het veeruurwerk veel bruikbaarder als isochrone klok dan het slingeruurwerk. Maar de achterliggende wiskunde bleef belangrijk. Eén element uit de nalatenschap van Huygens komt voort uit zijn vraag naar de precieze slingertijd van een 'gewone' slinger als functie van de amplitudo. Dit probleem geeft aanleiding tot een elliptische integraal en dit soort integralen heeft sindsdien niet afgelaten wiskundigen bezig te houden.

2 Veer en slinger

We beginnen met de afleiding van de bewegingsvergelijkingen van veer en slinger. Dit zijn differentiaalvergelijkingen, die de toestand van de veer en de slinger als functie van de tijd t bepalen. In beide gevallen is Newton's wet $F = m \times a$ cruciaal.

2.1 De vergelijkingen

Voor de veer gebruiken we bovendien de wet van Hooke, die zegt dat bij een (niet te grote) uitwijking x uit de evenwichtsstand de terugdrijvende kracht kx bedraagt. Hierbij is k een evenredigheids-constante. Hooke en Newton geven samen de betrekking $-kx = m\ddot{x}$. Hierin is $x = x(t)$ de uitwijking van de veermassa op tijdstip t, verder noteren we $x(t) = \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$ en $\ddot{x}(t) = \mathrm{d}^2x(t)/\mathrm{d}t^2$ voor snelheid respectievelijk versnelling van de veermassa. Korten we af $\omega^2 = k/m$, dan krijgen we als bewegingsvergelijking

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

Bij de slinger stelt x de uitwijking uit de evenwichtsstand voor, als hoek en gemeten in radialen. Newton's wet geeft de betrekking $-mg \sin x = ml\ddot{x}$. Hier is m de slingermassa, l de slingerlengte en g de versnelling der zwaartekracht, zie figuur 1b. Korten we af $\omega^2 = g/l$, dan levert dat de bewegingsvergelijking

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x$$

We zien hieruit dat de dynamica van de slinger onafhankelijk is van de massa m. Dit was als experimenteel feit reeds bekend bij Galileï [7].

2.2 Veertrillingen

De bewegingen van de veer krijgen we door de (lineaire) differentiaalvergelijking $\ddot{x} = -\omega^2 x$ op te lossen. Het is niet moeilijk na te gaan dat alle oplossingen $x = x(t)$ de vorm

$$x(t) = R\cos(\omega t + \varphi)$$

hebben. Hierbij zijn R en φ integratieconstanten, die samenhangen met de 'beginwaarden' $x(0)$ en $\dot{x}(0)$, namelijk via $x(0) = R\cos\varphi$ en $\dot{x}(0) = -\omega R\sin\varphi$. We zien hieruit dat, afgezien van het evenwicht $R = 0$, de beweging een oscillatie is, meestal 'trilling' geheten. De periode hiervan is gelijk aan $2\pi/\omega$, onafhankelijk van de amplitudo R. Periodieke bewegingen van deze eenvoudige vorm pleegt men *harmonisch* te noemen en daarom wordt de veer gerekend tot de harmonische oscillatoren.
Een analoog oplossingsprogramma voor de slingervergelijking werkt niet goed als gevolg van de genoemde elliptische integralen. Via een korte, meetkundige omweg kunnen we echter toch nog vrij veel informatie krijgen.

3 Het fasevlak

Een belangrijk hulpmiddel voor het begrijpen van de dynamica van veer, slinger en andere oscillatoren is het z.g. fasevlak. Teneinde dit te beschrijven beschouwen we even in het algemeen de bewegingsvergelijking

$$\ddot{x} = -F(x)$$

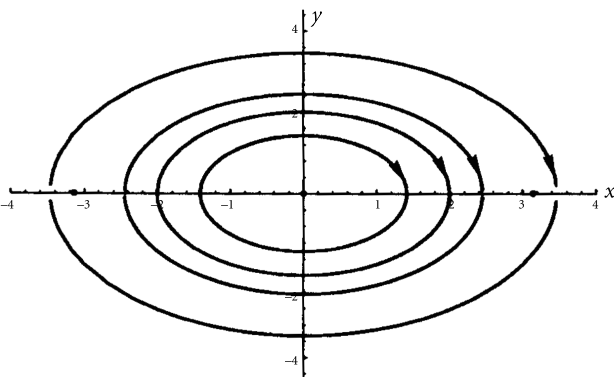
Voor veer en slinger geldt $F(x) = \omega^2 x$, dan wel $F(x) = \omega^2 \sin x$

3.1 Determinisme

Een gebruikelijke manier om met zo'n tweede orde vergelijking om te gaan is er een stelsel van twee eerste orde vergelijkingen van te maken. Schrijf hiertoe $y := \dot{x}$, dan ziet dit systeem eruit als

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -F(x)$$

Dit stelsel 'leeft' in het (x,y)-vlak, het *fasevlak.* In dit vlak wordt aldus een *vectorveld* gedefinieerd, dat de eigenschap van *determinisme* heeft. Dit wil zeggen dat gegeven de waarden (x_0, y_0) op een gegeven tijdstip $t = 0$, de gehele toekomst die geschreven kan worden als $\{(x(t), y(t)) \mid t > 0\}$, volkomen bepaald is.
Het paar $(x,\ y)$ van positie en snelheid karakteriseert zo de *toestand* van het systeem.



Figuur 2 Faseportret veer

3.2 Lijnelementenvelden

De term 'vectorveld' moge voor zich spreken: in elk punt (x, y) van het fasevlak grijpt een vector $(y, -F(x))$ aan. De oplossing $t \to (x(t), y(t))$ vormt dan een 'integraalkromme' van dit vectorveld. Dat wil zeggen dat in elk punt $(x(t), y(t))$ van de kromme het volgende geldt voor de bijbehorende raakvector: $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (y(t), -F(x(t)))$.

Als we de tijd elimineren gaat het vectorveld over in een *lijnelementenveld.* Hierin speelt de grootte van de raakvectoren geen rol meer, alleen nog de richting. Wiskundig komt dit neer op het gebruiken van relaties als

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

Het lijnelementenveld krijgt zo de vorm

$$y\mathrm{d}y + F(x)\mathrm{d}x = 0$$

De geparametriseerde krommen $t \to (x(t), y(t))$ van daarnet zijn ook precies de integraalkrommen van dit lijnelementenveld, zij het dat de tijd t nu haar betekenis verloren heeft. Men kan deze krommen bijvoorbeeld ook de (eventueel slechts locale) gedaante $x \to y(x)$ of $y \to x(y)$ geven.

3.3 Behoud van energie

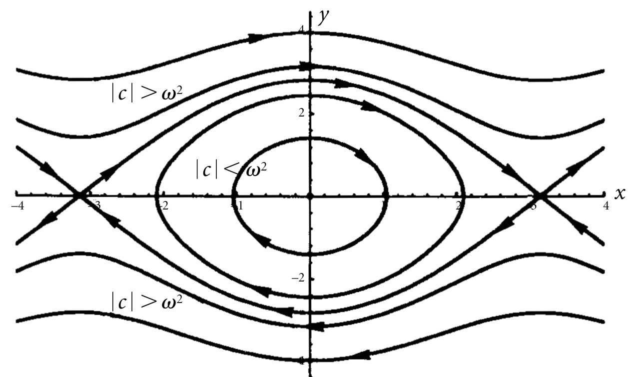
Deze lijnelementenvelden hebben wegens hun afkomst zekere speciale eigenschappen. Eén ervan is de symmetrie onder spiegeling in de x-as, die onmiddellijk uit de vorm $y\mathrm{d}y + F(x)\mathrm{d}x = 0$ af te lezen valt. Ook ziet men direct in dat alle singulariteiten van het veld op de x-as moeten liggen: deze corresponderen juist met de evenwichtspunten van het systeem.

Een andere belangrijke eigenschap is de *exactheid* van deze differentiaalvergelijking, die mechanisch overeenkomt met *behoud van energie.* Om maar met de deur in huis te vallen, laat de functie $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven worden door $H(x, y) := \frac{1}{2}y^2 + V(x)$, waarin $V'(x) = F(x)$. Afgezien van de fysische dimensies stelt hierbij de term $\frac{1}{2}y^2$ de kinetische, en $V(x)$ de potentiële energie voor. Voor onze voorbeelden veer en slinger kan men achtereenvolgens nemen: $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2x^2$ en $V(x) = -\omega^2 \cos x$. Merk op dat in het laatste geval $V(x)$ evenredig is met de verticale hoogte van de slingermassa, gemeten vanaf het ophangpunt.

Differentiëren levert dat

$$\mathrm{d}H = y\mathrm{d}y + F(x)\mathrm{d}x,$$

hetgeen juist betekent dat het lijnelementenveld exact is. De integraalkrommen van het lijnelementenveld zijn daarom de niveaukrommen $H(x, y) = c$ van de functie H.



Figuur 3 Faseportret slinger: Voor $|c| < \omega^2$ treden 'gewone' slingerbewegingen op, voor $|c| > \omega^2$ bewegingen waarbij de slinger 'over de kop slaat'

We concluderen dat elke integraalkromme in één vast energieniveau ligt, hetgeen behoud van energie impliceert.

3.4 Faseportretten

De exactheid van ons lijnelementenveld maakt het mogelijk de integraalkrommen precies aan te geven en te tekenen. Deze krommen zijn immers allemaal van de vorm $H(x, y) = c$, ofwel $\frac{1}{2}y^2 + V(x) = c$, hetgeen zich laat herschrijven tot $y = \pm\sqrt{2(c - V(x))}$. Een figuur, waarin voor een aantal welgekozen waarden van c deze krommen bijeengezet zijn, noemt men een *faseportret*. Zo'n faseportret geeft een overzicht van alle mogelijke soorten dynamica van ons systeem, zoals we nu zullen uitleggen.

Voor de veer vormen de integraalkrommen de familie ellipsen $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2x^2 = c$, $c \geq 0$. Beschouwen we nogmaals de algemene oplossing $x(t) = R\cos(\omega t + \varphi)$ van hierboven en realiseren we ons dat nu $y(t) = \dot{x}(t) = -\omega R\sin(\omega t + \varphi)$, dan kunnen we opmerken dat $t \to (x(t), y(t))$ juist zo'n ellips parametriseert, waarbij het verband tussen de amplitudo R en de energie c gegeven wordt door $c = \frac{1}{2}\omega^2R^2$. In figuur 2 is een aantal van deze ellipsen geschetst, pijlen geven de richting van de tijdsparametrisering aan.

In het geval van de slinger worden de integraalkrommen gegeven door $\frac{1}{2}y^2 - \omega^2\cos x = c$, $c \geq -\omega^2$, vergelijk figuur 3. Deze kromme is ovaal voor $|c| < \omega^2$ en de bijbehorende beweging is een 'gewone' beweging, dat wil zeggen oscillatie, van de slinger. De kromme is niet gesloten voor $c > \omega^2$ en valt bovendien in twee componenten uiteen. Hierbij hoort een over de kop slaande beweging van de slinger, linksom voor de bovenste en rechtsom voor de onderste component. Het grensgeval $c = \omega^2$ bevat de singulariteiten $(x, y) = (2(k + 1), 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, die corresponderen met de op z'n kop staande slinger. (Voor deze overwegingen dient men het slingertouwtje vervangen te denken door een gewichtsloos staafje.) De verbindende krommen representeren bewegingen die, zowel voor $t \to \infty$ als voor $t \to -\infty$, naar dit evenwicht naderen.

3.5 Periode van oscillatie

Beschouw nu de periode P van oscillatie als functie van de amplitudo, of equivalent, van de bijbehorende energie c. We herinneren ons uit § 2.2 dat voor de harmonische oscillator $P(c)$ de constante waarde $2\pi/\omega$ heeft. Anders gezegd, de harmonische oscillator, in het bijzonder de veer, is *isochroon.*

In de inleiding zeiden we reeds dat de slinger dat niet is. Dit kunnen we eenvoudig inzien m.b.v. het faseportret van figuur 3. Om precies te zijn, voor de slinger geldt $\lim_{c \to \omega^2} P(c) = \infty$.

De reden is dat als de slinger dichtbij het onstabiele evenwicht $(x, y) = (\pm\pi, 0)$ komt (waarbij de slinger op de kop staat), de beweging bijna stopt en het dus zeer lang duurt een volledige beweging te doorlopen.
Ook Galileï wist wel dat de slingertijd naar oneindig gaat als de maximale uitwijking tot 180° nadert. Interessant is dat hij heeft gedacht dat de slingertijd $P(c)$ voor kleine waarden van c écht constant is, zie [7,8].

Opmerkingen *i*. Met behulp van bovenstaande is het eenvoudig een integraaluitdrukking voor de periode $P(c)$ te geven. Te dien einde schrijven we de integraalkromme in het energieniveau $H(x, y) = c$ in de vorm $y = \pm\sqrt{2(c - V(x))}$. Hierin geldt $x_m \leq x \leq x_M$, waarbij $V(x_m) = V(x_M) = c$. Wegens het feit dat $dx/dt = y$ geldt nu dat $dt = dx/y = \pm\, dx/\sqrt{2(c - V(x))}$. Dit geeft de periode-integraal

$$P(c) = 2\int_{x_m}^{x_M} dx/\sqrt{2(c - V(x))}.$$

Voor de harmonische oscillator is deze integraal 'uit te rekenen': via de functie arcsin krijgen we het reeds bekende antwoord. Voor oscillaties van de slinger, dat wil zeggen voor $|c| < 2\omega^2$, geldt

$$P(c) = 2\sqrt{2}\int_0^{x_M} \frac{dx}{\sqrt{c + 2\omega^2\cos x}} =$$

$$2\sqrt{2}\int_{\frac{c}{2\omega^2}}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(c + 2\omega^2 z)}}$$

waarbij $\cos x_M = c/2\omega^2$. Dit soort integralen komt ook voor bij het berekenen van de omtrek van een ellips, vandaar de reeds genoemde naam *elliptische* integraal. Hij blijkt niet uit te drukken in 'elementaire' functies.

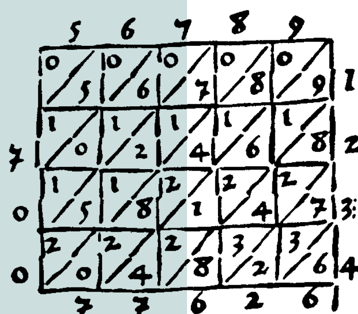
ii. Tegen Galileï's gedachte dat de slinger voor kleine amplitudo ook isochroon is bestaat de volgende, 'hedendaagse' redenering. Er volgt uit opmerking *i* dat $P(c)$ een analytische functie van c is. Verder moet elke analytische functie die op een intervalletje constant is, overal constant zijn. En dit laatste is niet het geval, vandaar.

iii. In deze paragraaf beschouwden we eigenlijk de klasse van alle mogelijke oscillatoren $\ddot{x} = -dV/dx$, dus met willekeurige potentiaal $V = V(x)$. Door de overwegingen uit opmerking *i* iets verder uit te breiden kan men inzien dat de harmonische oscillator, dus met

Korrel

Wierook

Op 3 november 1994 vond in Noordwijkerhout een symposium plaats met een uitermate serieus karakter: *Kerndoelen en PPON rekenen-wiskunde.* (PPON = Periodieke peiling van het onderwijsniveau).
We lezen waarover het symposium ging. De vernieuwing van rekenen en wiskunde in het basisonderwijs werpt vruchten af, en dat wordt in belangrijke mate bewerkstelligd door de realistische methoden. Kortom, de realistische methoden zorgen voor beter onderwijs.
Een echte analyse van de oorzaken van de - geconstateerde - kwaliteitsverbetering ontbreekt. Ik stel de onderliggende onderzoeken gemakshalve niet ter discussie.
Waardoor kan de kwaliteit van het rekenonderwijs verbeterd zijn?
De methoden kunnen een (grote?) rol spelen.
Maar ook weten we, dat er al enige jaren weinig verloop is onder de leraren basisonderwijs. Dus neemt de ervarenheid toe.
Voorts kunnen we vaststellen dat het basisonderwijs in de huidige vorm nu zo'n 10 jaar bestaat. Nadien hebben weliswaar fusies plaatsgevonden, maar op onderwijskundig gebied is de rust veel groter dan ruim 10 jaar geleden. Dat geldt, toevallig, eveneens voor de rekenmethoden. Na de periode waarin veel scholen een nieuwe methode invoerden, kan men daarmee goed overweg. Dat heeft met het 'realisme' niets te maken.
Hoe serieus kunnen we zo'n symposium nemen?
Is die sfeer van zelf-bewieroking te voorkomen?



M.van Hoorn

$V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$, ook de enige isochrone is.

4 De isochrone kromme

Als eerder gezegd is het nu Huygens' probleem, de slinger zodanig aan te passen dat deze ook isochroon wordt. Deze vraag splitsen we op in twee stukken.

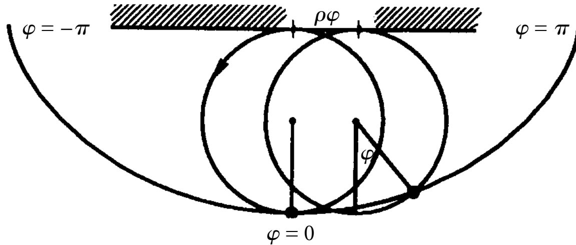
Allereerst bedenken we dat de slingermassa tijdens haar beweging een stuk cirkelboog beschrijft. De massa wordt op de cirkel gehouden door het touwtje of staafje. Merk hierbij op dat de hierdoor uitgeoefende kracht loodrecht op die cirkelboog staat en dus geen arbeid verricht.
Deze overweging nu rechtvaardigt de volgende *Gestalt-switch.* In plaats van de massa die aan een touwtje slingert denken we ons deze massa nu als een *kraal*, die wrijvingsloos langs een cirkelvormig *draadprofiel* glijdt.

Deze manier van kijken heeft tot voordeel dat we ook andere draadprofielen dan de cirkel kunnen bestuderen. Beschouw dus algemeen een (star) draadprofiel dat in een verticaal vlak ligt en waarlangs een kraal wijvingsloos kan bewegen onder invloed van de zwaartekracht. Het eerste deel van onze vraag is dan of er een kromme bestaat die zo aanleiding geeft tot isochrone bewegingen. We benaderen dit probleem vanuit de theorie van §3, die zegt dat juist de harmonische oscillator isochroon is. Wat het antwoord betreft vallen we met de deur in huis: zo'n 'isochrone kromme' bestaat inderdaad en het blijkt een cycloïde te zijn.

4.1 De cycloïde

Eerst een definitie. Beschouw een wiel dat in een vlak langs een rechte

lijn rolt. Een vast punt op de rand van dat wiel beschrijft dan een cycloïde. Men kan denken aan de baan van het ventiel van een fietswiel. In ons geval rolt het wiel echter niet over de grond, maar langs het plafond, zie figuur 4.



Figuur 4 Cycloïde, geparametriseerd door de rolhoek φ

Laat ρ de straal van het wiel zijn en laat φ de positie van het ventiel op de cirkel aangeven, in radialen gemeten vanuit de onderste verticale stand. Geven we de coördinaten van het verticale vlak aan met ξ en η, dan volgt direct dat

$$\xi(\varphi) = \rho(\varphi + \sin\varphi), \eta(\varphi) = \rho(1 - \cos\varphi)$$

onze cycloïde parametriseert.

4.2 De harmonische oscillator 'revisited'

Waarom is deze kromme isochroon? Om deze vraag te beantwoorden leggen we het al genoemde verband met de (isochrone) harmonische oscillator, zie §§ 2 en 3.

De dynamica van de kraal langs de kromme wordt algemeen bepaald via de bewegingsvergelijking $\ddot{x} = -\,\mathrm{d}V(x)/\mathrm{d}x$. Hierbij wordt de positie x van de kraal gemeten in termen van de afgelegde weg x langs de kromme, dat wil zeggen de *booglengte* van die kromme. Verder wordt hier de zwaartekracht tot uitdrukking gebracht door een potentiële energie $V = V(x)$, die evenredig is met de *verticale hoogte*, dat wil zeggen met de η-coördinaat van de kraal.
Laten we nu al deze zaken expliciteren voor de cycloïde.

We merken op dat in het voorgaande de rol van x steeds geassocieerd was met de afgelegde weg. Bij de veer is dit tamelijk evident en bij de slinger met lengte l is, bij een uitwijkingshoek van x radialen, de booglengte langs de cirkel lx.

Eerst dus de booglengte $x = x(\varphi)$ van de cycloïde. Met de Stelling van Pythagoras volgt

$$\mathrm{d}x = \sqrt{(\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}\varphi)^2}\ \mathrm{d}\varphi =$$

$$\rho\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos\varphi}\ \mathrm{d}\varphi = 2\rho\cos\tfrac{\varphi}{2}\ \mathrm{d}\varphi,$$

en we hoeven nog slechts te integreren tot

$$x(\varphi) = 4\rho\sin\tfrac{\varphi}{2}.$$

We tonen vervolgens aan dat $V(x)$ evenredig is met x^2, aldus bewijzend dat we te maken hebben met een harmonische oscillator. Als gezegd is de potentiële energie $V(x)$ evenredig met de η-coördinaat van de kraal. Gemakshalve nemen we de bijbehorende evenredigheids-constante gelijk aan 1. We berekenen nu $V(x)$ expliciet in termen van x. Dan blijkt

$$V(x(\varphi)) = \eta(\varphi) = \rho(1 - \cos\varphi) = 2\rho\sin^2\tfrac{\varphi}{2} =$$

$$\tfrac{1}{8\rho}(x(\varphi))^2,$$

waaruit inderdaad volgt dat $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ met $\omega = 1/(2\sqrt{\rho})$.

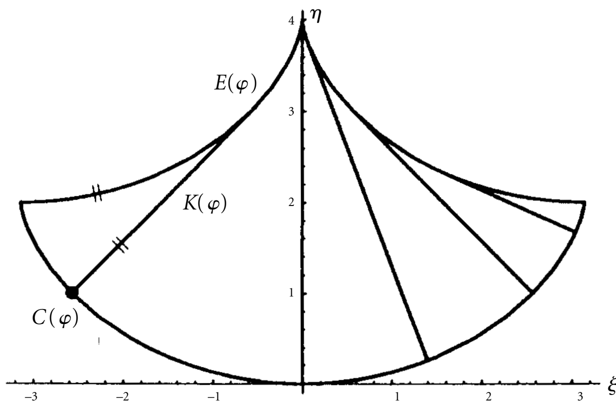
Opmerkingen

i Voor Huygens was het, zonder gebruik van differentiaal- en integraalrekening, niet eenvoudig bovenstaande booglengte-integraal te berekenen, dat wil zeggen om de cycloïde te *rectificeren*. Vandaar zijn meetkundige uitweidingen [10].

ii Het is tamelijk rechttoe rechtaan te bewijzen dat de cycloïde de enige isochrone kromme is. Eén manier is met behulp van bovenstaande overwegingen een differentiaalvergelijking voor de isochrone kromme af te leiden.

5 Huygens' implementatie

Het tweede deel van de vraagstelling betreft hoe de isochrone kromme weer in verband te brengen met de slinger. Het antwoord hierop maakt gebruik van de meetkundige eigenschappen van de cycloïde. Laten we de hierboven gevonden cycloïde aangeven met C. Huygens kwam nu op het lumineuze idee het slingertouwtje vanuit het ophangpunt af te wikkelen langs een geschikte kromme E, zodanig, dat de slingermassa precies C doorloopt. De kromme E heet de *evoluut* van C, die op zijn beurt wel *evolvent* wordt genoemd.



Figuur 5 Evoluut E boven, evolvent C beneden

Uit de meetkunde is het volgende verrassende feit bekend, namelijk dat E opnieuw een cycloïde is, zie onder andere do Carmo [5]. We zullen hier nu nader op ingaan, voor de straal van het wiel (zie boven) gemakshalve $\rho = 1$ nemend. Zo wordt C geparametriseerd door $C(\varphi) = (\xi_C(\varphi), \eta_C(\varphi))$, waarbij

$$\xi_C(\varphi) = \varphi + \sin\varphi, \eta_C(\varphi) = 1 - \cos\varphi.$$

We vallen nogmaals met de deur in huis en parametriseren de kromme E door: $E(\varphi) = (\xi_E(\varphi), \eta_E(\varphi))$, waarbij $\xi_E(\varphi) = \xi_C(\varphi + \pi)$ en $\eta_E(\varphi) = 2 + \eta_C(\varphi + \pi)$. Dit geeft

$$\xi_E(\varphi) = \varphi - \sin\varphi, \eta_E(\varphi) = 3 + \cos\varphi$$

Het moge duidelijk zijn dat E door translatie uit C ontstaat en dus een met C congruente cycloïde is, zie figuur 5. We tonen nu aan dat E ook inderdaad de evoluut van C is, ons beperkend tot het parameterdomein $|\varphi| < \pi$.

Laat hiertoe $K(\varphi) := E(\varphi) - C(\varphi)$ de koorde zijn, die de punten $C(\varphi)$ en $E(\varphi)$ verbindt. De lengte van $K(\varphi)$ geven we aan met $k(\varphi)$. Verder zij $b(\varphi)$ de lengte van het stuk boog tussen $E(\varphi)$ en dichtstbij gelegen uiteinde van E. Door een eenvoudige berekening is na te gaan dat de koorde $K(\varphi)$ raakt aan E en loodrecht staat op C. Om iets preciezer te zijn: zowel $K(\varphi)$ als $E'(\varphi)$ zijn scalaire veelvouden van de vector $(\sin\frac{1}{2}\varphi, -\cos\frac{1}{2}\varphi)$, terwijl $C'(\varphi)$ een scalair veelvoud is van $(\cos\frac{1}{2}\varphi, \sin\frac{1}{2}\varphi)$. Hieruit volgt het gestelde onmiddellijk.

Dit betekent dat E de omhullende is van de normalenbundel van C, één van de karakteriseringen van het begrip evoluut [5], vergelijk het rechterdeel van figuur 5. Hiermee hangt onder andere samen dat $k(\varphi)$ de kromtestraal is van C in het punt $C(\varphi)$, en ook dat $k(\varphi) = b(\varphi)$. Dit laatste volgt overigens direct door inspectie van de booglengte-formule uit § 4.2: als we wederom op de halve hoek overgaan blijkt dat $b(\varphi) = 4\sin\frac{1}{2}(\varphi + \pi) = 4\cos\frac{1}{2}\varphi = 2\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos\varphi} = k(\varphi)$.

Als ophangpunt van het slingertouwtje kiezen we nu de 'spits' van E, met coördinaten $(\xi, \eta) = (0, 4)$. Dit touwtje wikkelt af langs de (metalen) 'wangen', gevormd volgens E. Vergelijk ook figuur 1a. Het touwtje laat los volgens de raaklijn en is dus gericht volgens de koorde K. Als gezegd loopt de slingermassa zo langs de cycloïde C. Het feit dat het touwtje bovendien loodrecht op C staat, impliceert dat de kracht die het uitoefent geen invloed heeft op de beweging. Het geheel gedraagt zich dus inderdaad als een kraal die wrijvingsloos langs C glijdt en zodoende hebben we een isochrone slinger.

6 Tenslotte

We vatten bovenstaande kort samen. Vanuit een algemene theorie van oscillatoren en met behulp van elementaire differentiaal- en integraalrekening hebben we Huygens' antwoorden [10] 'geverifieerd'. De isochronie van de cycloïde werd in verband gebracht met de harmonische oscillator, die onder alle oscillatoren de enige isochrone is. Overigens hebben we de dieper liggende existentie-problematiek in het kader van dit artikel slechts kunnen aanduiden.

In Yoder [13] vindt men een weergave van Huygens' 'Horologium Oscillatorium' [10] in historisch perspectief. Zoals gezegd wordt hierin nog geen differentiaal- en integraalrekening gebruikt. Zie voor een bespreking van Huygens' wiskunde onder andere ook Bos [3]. Voor zover mij bekend bestaat nog geen 'hedendaagse' weergave van Huygens' ideeën, op de manier waarop Arnold [2] dat heeft gedaan met delen van Newton's werk.

Tot slot nog dit. We hebben in onze wiskundige verhandeling de meeste fysische constanten voor het gemak gelijk genomen aan 1. Dit is te rechtvaardigen door een geschikte keus van de eenhedenstelsels. Uit figuur 5 zien we echter direct het volgende verband tussen de slingerlengte l en de straal ρ van het cycloïde-wiel: $l = 4\rho$. De isochrone frequentie uit § 4.2 is dan $= \omega\sqrt{g/l}$, waarbij g de versnelling van de zwaartekracht is.

Ik dank Harm Bakker, Jan van de Craats, Mark Levi, Wout de Goede, Igor Hoveijn, Jan van Maanen en Gert Vegter voor hun commentaar op een eerdere versie van deze tekst.

Noten

1 C.D. Andriesse, *Titan kan niet slapen*. Uitgeverij Contact Amsterdam/Antwerpen 1993.

2 V.I. Arnold, *Huygens & Barrow, Newton & Hooke*. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin 1990.

3 H.J.M. Bos, Huygens and mathematics. In: H.J.M. Bos, M.J.S. Rudwick, H.A.M. Snelders en R.P.W. Visser (eds.), *Studies on Christiaan Huygens*, Invited Papers from the Symposium on the Life and Work of Christiaan Huygens, Amsterdam, 22-25 August 1979, Swets & Zeitlinger, Lisse 1980.

4 H.W. Broer, J. Epema en M. Kuipers, *Oscillaties: Trillingen en Slingerbewegingen vanuit Wiskundig Oogpunt*. Vakgroep Wiskunde, Rijksuniversiteit Groningen 1987.

5 M.P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs 1976.

6 H.F. Cohen (ed.), *Een Quaestie van Tijd*. Mededeling/Museum Boerhaave 197, Leiden 1979.

7 G. Galileï, *Dialogues Concerning Two New Sciences*, (H. Crew and A. de Salvio, transl.), Dover Publications, Inc, New York 1954.

8 H.H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations, From the 17th Through the 19th Century*. Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 5, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1980.

9 R. Hooykaas, *Experientia ac Ratione: Huygens tussen Descartes en Newton*. Mededeling/Museum Boerhaave 201, Leiden 1979.

10 Chr. Huygens, *Œuvres Complètes* XVIII. Swets & Zeitlinger, Amsterdam 1967.

11 M.S. Mahoney, Christiaan Huygens: The measurement of time and of longitude at sea. In: H.J.M. Bos, M.J.S. Rudwick, H.A.M. Snelders en R.P.W. Visser (eds.), *Studies on Christiaan Huygens*, Invited Papers from the Symposium on the Life and Work of Christiaan Huygens, Amsterdam, 22-25 August 1979, Swets & Zeitlinger, Lisse 1980.

12 M. van Santvoord en D. Vermetten (vormgevers), *Christiaan Huygens*, 1629 -1695. Mededeling/Museum Boerhaave 224, Leiden 1988.

13 J.G. Yoder, *Unrolling time, Christiaan Huygens and the mathematization of nature.* Cambridge University Press, 1988.

Samenvatting

Slingeruurwerken, waarbij de slingermassa vrij beweegt, zijn in het algemeen onbetrouwbaar. De reden hiervan is dat de slingertijd van de massa toeneemt met de uitwijking van de slinger. Christiaan Huygens heeft een groot deel van zijn leven besteed aan de vraag hoe een gelijklopende of isochrone slingerklok te construeren. Het resultaat is een uurwerk, waarbij de slinger langs metalen 'wangen' afgerold wordt. De wangen hebben de vorm van een cycloïde. Dat geldt ook voor de kromme die het uiteinde van de slinger doorloopt.
In het artikel geeft de auteur een verklaring voor het feit dat beide vormen cycloïden zijn. Hij maakt daarbij gebruik van hedendaagse technieken en schrijfwijzen, zoals die onder meer voorkomen in het curriculum wiskunde B van het vwo. Tevens gaat hij in op de meetkunde achter de isochrone slinger van Huygens. Daarbij speelt het begrip evoluut van een kromme een belangrijke rol.

Werkblad

Waar was de camera?



Noten

1 1 voet = 30,48 cm
2 N.B. Het gebouw op de foto heeft zijaanzichten die exact gelijk zijn aan het vooraanzicht met de poort op de foto
3 Bron: Edinburgh Mathematics Teaching Group

Werkblad



Het navolgende artikel is een reactie op een eerder in deze jaargang geplaatst artikel; de auteur is werkzaam bij Statisticalc, Diemen en de Hogeschool voor Economische Studies, Amsterdam.

Over gemiddelden (2)

J.M. Buhrman

In een artikel in Euclides 70-2 (oktober 1994) geeft Wijnia enig commentaar op een statistiekopgave uit een examen wiskunde A. Mensen die statistiek onderwijzen, weten dat dit een bekend struikelblok is voor leerlingen. Wat er moet worden berekend is de zogeheten kans op de fout van de tweede soort.

In het verhaal komen *vier* gemiddelden voor. Het eerste is de feitelijke gemiddelde levensduur van de geproduceerde batterijen. Het tweede is de bedoelde gemiddelde levensduur. Het derde is de gemeten gemiddelde levensduur in een steekproef van batterijen (40 per dag). Ten slotte is er nog de mogelijke gemiddelde levensduur. In de opgave staat (ik citeer Wijnia):
Stel dat de levensduur van de op een bepaalde dag geproduceerde batterijen normaal verdeeld is met een gemiddelde van slechts 582 minuten en een standaarddeviatie (de correcte term is standaardafwijking, zie normbladen voor statistiek) van 50. Deze 582 is een mogelijke gemiddelde levensduur van de productie, waarvan wordt verondersteld dat hij gelijk is aan de feitelijke levensduur. Deze waarde moet worden gebruikt bij de berekening; dat is de betekenis van de term 'veronderstellen'.

De bedoelde levensduur is volgens Wijnia's tekst 8,5 uur, wat neerkomt op 510 minuten. Hier zal wel iets niet kloppen, want als de gemiddelde levensduur van de batterijen uit de steekproef lager uitkomt dan 592 minuten, is er weinig reden om te vinden dat de feitelijke gemiddelde levensduur te kort is. Vermoedelijk is de bedoelde gemiddelde levensduur gelijk aan 10 uur, want dan zou de grenswaarde van 592 nèt iets onder het bedoelde gemiddelde van de productie liggen. Het doet voor de rest van de opgave niet terzake.

Dus: als de gemiddelde levensduur van 40 batterijen (de aselecte steekproef) minder is dan 592, wordt het fabricageproces bijgesteld, zoniet dan wordt er niet bijgesteld. De kans op deze laatste gebeurtenis moet worden berekend. In welke veronderstelling? In de veronderstelling dat de feitelijke gemiddelde levensduur van de productie op die dag 582 bedraagt. De eerste reactie dat er moet worden bijgesteld als het gemiddelde 582 bedraagt, ligt voor de hand. Na goed lezen echter wordt duidelijk: 582 slaat op het feitelijke gemiddelde van de hele productie. Dat gemiddelde zullen we nooit weten als we niet alle batterijen onderzoeken, maar na zo'n onderzoek zouden ze ook allemaal leeg zijn. Dan waren niet alleen de productie, maar ook het onderzoek en dus ook de gevraagde berekening voor niets. Bijgesteld wordt er als het gemiddelde van de steekproef lager is dan 592. Dit gemiddelde moet nog worden gemeten en hoeft natuurlijk niet gelijk te zijn aan dat van de levensduur van de dagproductie, die dus op 582 moet worden gesteld.

Uit de gegevens (of eigenlijk: de veronderstellingen $\mu = 582$ en $\sigma = 50$) omtrent de verdeling van de levensduur van een batterij leiden we af dat het gemiddelde van de steekproef een normale verdeling heeft met een gemiddelde van 582 en een standaardafwijking van $50/\sqrt{40}$. Voor deze conclusie is geen 'gezond verstand' nodig of 'examenervaring', maar kennis van statistiek. Hooguit maakt die ervaring dat we eerder bedenken dat de standaardafwijking van het gemiddelde van de steekproef gelijk is aan $50/\sqrt{40}$ en niet aan 50.

Dan nu de berekening van de gevraagde kans. De kans dat het gemiddelde van de steekproef hoger uitkomt dan 592 vinden we in de standaardnormale tabel bij

$$(592 - 582) / (50/\sqrt{40}) = 1{,}2649$$

Uit die tabel blijkt dat de gevraagde kans tussen 10,38% en 10,2% ligt. Aangezien het gevraagde percentage op gehelen moest worden afgerond is 10 het simpele antwoord.

De volgende reactie op het artikel 'Over gemiddelden' van Klaas Wijnia in Euclides 70-2 is afkomstig van J. Breeman, mede-opsteller van het WIEWA-rapport, en C. Lagerwaard (Cito)

Over gemiddelden (3)

Kees Lagerwaard
Jan Breeman

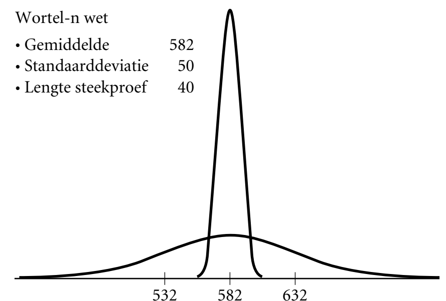
Collega's die betrokken zijn geweest bij het examen 1994 vwo wiskunde A (1e tijdvak) zullen met verbazing het bovengenoemde artikel hebben gelezen. Zij zagen meteen dat de schrijver een onjuiste voorstelling van zaken gaf en ernstige statistische fouten maakte.
Anderen zullen misschien gedacht hebben 'Tjonge jonge, wat een slechte examenvraag'. En dat laatste vinden we jammer, want aan de vraag was niets mis ! Vandaar deze reactie.

De opgave gaat over het produceren van batterijen. Na twee inleidende vragen is het volgende kader aangebracht:
de levensduur van de batterijen die elke dag geproduceerd worden, is normaal verdeeld met een vaste standaarddeviatie van 50 minuten. Het gemiddelde is afhankelijk van een aantal factoren in het fabricageproces en kan daardoor per dag anders zijn. In een eerste grote steekproef was dit gemiddelde ongeveer 600 minuten, de producent vindt een gemiddelde van 584 minuten nog net acceptabel.

Het zal duidelijk zijn dat men de gemiddelde levensduur van alle batterijen alleen maar precies kan vaststellen als **alle** exemplaren worden getest. Helaas zijn ze dan onverkoopbaar geworden. Op bedrijfseconomische gronden moet men daarom in de praktijk vaak volstaan met een steekproef. Op grond van de steekproefuitslag neemt men beslissingen over de populatie. De statistiek verschaft ons enig inzicht in deze wereld van onzekerheid. Daarom is het belangrijk dat bij wiskunde A aandacht wordt besteed aan deze materie.

In de opgave wordt de volgende testprocedure gehanteerd:
Elke dag zal er aan de hand van een aselecte steekproef van 40 batterijen uit de dagproduktie nagegaan worden of het fabricageproces bijgesteld moet worden omdat het gemiddelde mogelijk te laag is. Criterium daarvoor is de gemiddelde levensduur van die 40 batterijen. Als deze minder is dan 592 minuten wordt het proces bijgesteld.
Zinvolle vragen in zo'n situatie zijn:
- Hoe zit het met de kans dat ten onrechte wordt bijgesteld ?
- Hoe zit het met de kans dat ten onrechte niet wordt bijgesteld ?

De tweede vraag is in het examen aan de orde gesteld. Natuurlijk niet in de formulering als hierboven. En ook niet zo algemeen. Nee, toegespitst op een concreet geval:
Stel dat de dagproduktie normaal verdeeld is met gemiddelde 582 minuten. Bereken de kans dat het proces niet wordt bijgesteld.



Dit was de eerste keer dat de $\sqrt{n}$-wet in een examen aan de orde werd gesteld. Het is een belangrijk statistisch instrument dat met name genoemd wordt in het WIEWA-rapport en aandacht krijgt in de leerboeken.
De figuur geeft goed weer wat er aan de hand is. Als je een enkel exemplaar trekt uit de dagproduktie (de populatie) dan heb je te maken met een normale verdeling met $\mu = 582$ en $\sigma = 50$.
Als je 40 exemplaren trekt uit de (groot gedachte) populatie en daar het gemiddelde van neemt, dan is dat steekproefgemiddelde normaal verdeeld met $\mu = 582$ en $\sigma = 50/\sqrt{40} \approx 7{,}91$. Berekend moest worden hoe groot de kans is dat het steekproefgemiddelde minstens 592 is.

Zoals uit het examenverslag blijkt, is deze vraag vrij slecht gemaakt. Wij vermoeden dat dat vooral te maken heeft met het feit dat dit type vraag nieuw op het examen was. Bovendien was de vertaalslag van context naar wiskundig (statistisch) model vrij lastig (23% van de leerlingen scoorde op deze vraag 0 punten).

Wij nodigen de lezer uit het artikel van Klaas Wijnia opnieuw te lezen. Als het de bedoeling van Klaas was om te kruipen in de huid van een leerling die:

- zijn/haar les niet geleerd heeft
- zich niet inleeft in de context
- uitermate slecht leest
- van de hak op de tak springt
- populatie en steekproef voortdurend verwart

dan is hij daar uitstekend in geslaagd. Als hij daarbij de gemiddelde wiskunde A-leerling voor ogen had, doet hij deze leerlingen groot onrecht.

Nawoord

Over gemiddelden (4)

Klaas Wijnia

Kennelijk heb ik het hart van de rechtgeaarde leraar/lezer geraakt. Het was mij in het artikel niet begonnen om de oplossing, wel om het feit dat zoveel leerlingen vraag 9 (met een p'-waarde van 46) niet beantwoordden.
Grafieken als door Kees Lagerwaard en Jan Breeman geleverd hebben mijn leerlingen vaak genoeg voorgeschoteld gekregen.

Ik heb mij afgevraagd wat er mogelijk in een leerling omgaat tijdens een examen. Soms kan teveel goed bedoelde informatie mist veroorzaken.
In de opgave staat:
Stel dat de levensduur van de op een bepaalde dag geproduceerde batterijen normaal verdeeld is met een gemiddelde van slechts 582 minuten en een standaarddeviatie van 50 minuten.
Vergelijk dit met wat Lagerwaard en Breeman schrijven:
Stel dat de dagproduktie normaal verdeeld is met een gemiddelde van 582 minuten.
Dit is een zin die beter aansluit bij de gegeven context en dwingt tot herlezen en verwerken van de gegeven informatie. (De standaarddeviatie was al eerder gegeven.)
Lagerwaard en Breeman geven dus niet de opgave weer, maar een analyse van de opgave. Ook de *kadertekst* die zij weergeven, komt niet overeen met de tekst in de opgave. Hun zin over een gemiddelde van ongeveer 600 minuten staat niet in de opgave. En een kader komt zelfs in de hele opgave niet voor.
Natuurlijk kan een leerling ook andere dingen door zijn hoofd hebben laten gaan, zoals het verschil tussen 8,5 uur (510 minuten) en de regelgrens van 592 minuten.

Ken ik de *gemiddelde* wiskunde A-leerling?

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Inhoud

Van de bestuurstafel

Een wet is pas wet als er Beatrix onder staat

In ons Vademecum voor de Wiskundeleraar staat het in september '92 aan de minister aangeboden COW-concept C/D-eindexamenprogramma. Hoe en wanneer wordt dit programma nu eindelijk wettelijk vastgesteld?
De staatssecretaris zegde in '91 toe dit vóór augustus '93 te doen. In oktober '92 begon de ministeriële revisiecommissie de vorm te veranderen: voor alle vakken gelijksoortige formuleringen. Deze concepten waren in september '93 gereed.
Omdat men intussen in de eerste klas al werkte volgens dit COW-leerplan, beloofde de minister het wiskundeprogramma versneld vast te stellen; in maart luidde het nog: 'vóór augustus '94'.

C/D houdt meerkeuze?

In april werd ons advies gevraagd over een (acceptabele) weer iets gewijzigde versie. Wie schetst echter onze verbazing toen wij in oktober een versie kregen die bijna gelijk leek, maar… waarin de zin ontbrak: 'er zullen geen meerkeuzevragen gesteld worden'.
In ons protest tegen deze weglating staat onder meer:
'Vanaf het begin van de werkzaamheden van de COW is het uitgangspunt voor een nieuw programma geweest, dat het wiskundeonderwijs een algemeen vormend karakter heeft en gericht is op het gebruik van wiskunde in de maatschappij. Weliswaar behoeft het weglaten van de zin 'Er zullen geen meerkeuzevragen worden gesteld' op zich niet te betekenen dat er wel meerkeuzevragen zullen worden gesteld, maar het is niet onmogelijk. Binnen en buiten de COW is men het er over eens dat door een examen met meerkeuzevragen bovenstaand uitgangspunt geweld wordt aangedaan.'

Advies vbo-B examens

Hoewel voor vbo-B (nog) geen verplicht centraal examen bestaat, adviseert het SABO (Samenwerkingsverband avo-beroepsonderwijs) om zijn afsluitende B-examenopgaven nu al als zodanig te gebruiken, d.w.z. afname van alle opgaven, gelijktijdig met C/D, even zwaar tellend als schoolonderzoek. Dit verhoogt de status van het B-examen.
Terwijl het rijk de verplichte examens betaalt, moeten scholen deze vbo-B-examenopgaven wel kopen! Tot nu toe deden lang niet alle scholen dit; of zij gebruikten maar een deel van de opgaven, of het cijfer ervoor telde voor minder dan de helft mee bij de bepaling van het eindcijfer.
Het SABO hoopt met ingang van '97 opgaven te leveren volgens het, door het SABO in voorjaar '95 reeds vast te stellen, nieuwe B-programma, dat prima aansluit zowel op de kerndoelen BAVO als op het COW C-programma.

Agneta Aukema-Schepel

De NVvW komt naar u toe

Regionale bijeenkomsten in februari in vier plaatsen

Zoals u reeds hebt kunnen zien in ons 'balboekje' dat de 'wiskundedansjes' voor het cursusjaar '94-'95 bevat, organiseert de vereniging voor de derde maal regionale studiebijeenkomsten:

te ROTTERDAM
op **dinsdag 14 februari**
CSG Henegouwerplein
nabij NS Centraal
Henegouwerplein 14-16

te AMSTERDAM
op **donderdag 16 februari**
Augustinus College
metro r.Gspplas, halte Venserpolder NS tussen Duivendrecht & Diemen - Zuid
Dubbelink 1

te ZWOLLE
op **dinsdag 21 februari**
SG Greijdanus
nabij uitgang Zuid NS
Campus 5

te EINDHOVEN
op **donderdag 23 februari**
HS Eindhoven Fac Techniek
nabij uitgang noord NS
Rachelsmolen 1

Indeling van het programma:

15.45-16.00 **ontvangst**
16.00-16.10 **opening, lokaalindeling**
16.15-17.45 **middagwerkgroep**
17.45-18.30 **eenvoudige maaltijd**
18.30-20.00 **avondwerkgroep**

Iedereen kan dus één middag- en één avondwerkgroep bijwonen. Voor elk dient men een 1e en 2e keus op te geven. Wie zich het eerst meldt krijgt de eerste keus…
We prijzen ons gelukkig dat wederom een aantal mensen zich bereid heeft verklaard om geheel belangeloos hun speciale expertise en/of hobby aan u uit te dragen en u uit te dagen!
LET OP: het aanbod is dan ook niet in alle plaatsen gelijk: *)

Middagwerkgroepen

B. Licht je antwoord toe:
voorbeelden en uitwerkingen van leerlingen bij experimentele vbo-mavo examens. Toelichten is te leren?
Ro: Ineke Humblé
Am: Truus Dekker
Zw: Paul Robbert Borg
Ei: Fried den Ouden

C. Schotse GWA voor 12-18 jarigen:
deelnemers kunnen aan het werk met aardige practicumopdrachten, afkomstig uit Schotland.
Ro: Irene Dalm en Niek Brokamp
Am: Conny Gaykema en Cees van der Meyden
Zw: Hans van Lint en Jeanne Breeman
Ei: Jan Debets en Ynske Schuringa

D. Rapport commissie Van Veen:
recht doen aan verscheidenheid in vbo/mavo.Voor welke sectoren, bij welke leerwegen wordt wiskunde wettelijk verplicht, doorstroomverplicht, doorstroomrelevant?
Willen en kunnen we hier iets aan veranderen?
Ro: Ruud Jongeling
Am: Sylvia van de Werf
Zw: Bram van de Wal
Ei: Marian Lambriex

F. De zakrekenmachine kan meer dan rekenen:
denk ook aan voor- en nadelen van 'scientific' machines. Hoe benutten we de didactische mogelijkheden?
Ro: Gert van Bemmel en Leen Bozuwa
Am: Hans ter Heege
Ei: Harry Broekman en Ton Vandeberg

G. Gisteren begreep ik het goed:
bewijzen, overtuigen en begrijpen. Hoe gaan onze leerlingen met wiskunde om?
Zw: Piet van Wingerden

H. Vlakke meetkunde:
waardevol voor havo/vwo wiskunde B?
Am: Martin Kindt
Ei: Martin Kindt

I: Historische achtergronden van het aanvankelijke meetkundeonderwijs:
tot 1950 de Euclidische aanpak, daarna pogingen met een intuïtieve inleiding, dan transformatiemeetkunde en nu de reële kijkmeetkunde. Wie waren animators, met welke motieven? Achtergronden van 'vormende waarde' versus 'praktische waarde'.
Ro: Ed de Moor
Zw: Ed de Moor

Avondwerkgroepen

T. Waar kun je op rekenen?
Veranderingen in het wiskundeonderwijs op de basisschool.
Ro: Hans Scheurkogel
Am: Nora Blom
Zw: Luuk Jacobs
Ei: Vincent Klabbers

U. Aansluiting vbo/mavo op mto:
Hoe is het nu? Hoe wordt het met het nieuwe C/D examenprogramma?
Ro / Am / Zw / Ei:
Verzorgd door 'platform van verontruste mto-wiskundedocenten'.

V. Tweede fase havo/vwo:
zes profielen, wat komt eraan, wat komt er uit?
Ro / Am / Zw / Ei:
Verzorgd door leden van de vakontwikkelgroep.

W. Plezier en schoonheid van echte wiskunde voor 12-16 jarigen: wiskundig onderzoeken en bewijzen in de VIERKANT-praktijk. Activiteiten en video.
Ro / Am / Zw / Ei:
Verzorgd door 'VIERKANT voor wiskunde': Zsófia Ruttkay en Henk Barendregt.

X. Demonstratie van werken in de klas met simpel te verkrijgen materialen.
Am: Sjoerd Schaafsma
Ei: Sjoerd Schaafsma

Y. Onze praktijk van GWA:
voorbeelden van aanpak, reacties van leerlingen, en het combineren van wiskunde en gezond verstand.
Ro: Wim Schaafsma en Wim Kuipers
Zw: Wim Schaafsma en Wim Kuipers

Tenslotte
Uw inschrijving wordt niet bevestigd; bij binnenkomst vindt u uw sticker met codes voor uw werkgroepen. Wij proberen u te berichten als noch uw eerste, noch uw tweede keus door kan gaan. Vermeld daartoe uw telefoonnummer.

Certificaat
Wilt u een nascholingscertificaat voor promotiecriteria ontvangen, vermeldt bij uw opgave dan ook uw voorletters en uw geboortedatum. U krijgt na afloop van de studiebijeenkomst het certificaat uitgereikt na het tonen van een identiteitsbewijs. U hebt alleen recht op een certificaat als u de gehele bijeenkomst hebt bijgewoond.

Kosten
Leden van de NVvW, en degenen die nu lid worden, betalen geen organisatiekosten. Van niet-leden wordt hiervoor een bijdrage van ƒ35,– gevraagd. Voor de maaltijd en koffie of thee dient elke deelnemer ƒ15,– te betalen. De overschrijving van ƒ15,– of ƒ50,– op giro 143917 t.n.v. NVvW Amsterdam, **moet vóór 7 februari** binnen zijn. Ter plaatse aanmelden is niet mogelijk.

Hoe aanmelden?
Aan elke school is ook een aankondiging gestuurd. Dus breng uw collega (nog) niet lid mee.
Maakt uw school het bedrag over, dan dient u zich – i.v.m. mogelijke naamsverminking – in te schrijven via het schoolopgavebiljet.
Geschiedt de afschrijving van een rekening op uw eigen naam, vermeld dan de plaatscode; in volgorde van voorkeur eerst de twee middag-, dan de twee avondcodes; uw tel.nr.; uw voorletters; en als u een certificaat wilt uw geboortedatum.
Voorbeeld:
RoBCWY010-1234567J 1-1-'50
(N.B. Banken geven max. 30 tekens aan de giro door)

Noot

* Ro, Am, Zw , Ei geven aan in welke plaats de werkgroep draait en dankzij wie. De hoofdletter vóór de titel is de opgavecode.

Felicitatie

De redactie wenst Jan Maassen van harte geluk met zijn erelidmaatschap van de NVvW en zijn koninklijke onderscheiding!

Het 31ste Nederlands Mathematisch Congres 1995

Het 31ste Nederlands Mathematisch Congres wordt op donderdag 20 en vrijdag 21 april 1995 gehouden in het Zernike complex van de Rijksuniversiteit Groningen, Paddepoel, Landleven 12, Groningen. Het Congres staat in 1995 in het teken van Johann Bernoulli: het is dan driehonderd jaar geleden dat Johann Bernoulli in Groningen als hoogleraar in de wiskunde werd aangesteld.

Het programma omvat onder meer de volgende plenaire voordrachten:

a Openingsvoordracht (donderdagochtend): Prof. dr. H.J.M. Bos (RUU): *Johann Bernoulli over exponentiële krommen, ca. 1695 - vernieuwing en gewenning in de overgang van expliciete constructie naar impliciete functie.*

b JOHANN BERNOULLI LEZING 1994-1995 (donderdagavond): Prof. dr. H.W. Lenstra, Jr. (University of California, Berkeley) *Wiskunde en onbegrip.*

Verder zijn er Parallelle Voordrachten op uitnodiging en Symposia voor:

a Geschiedenis en maatschappelijke functie van de wiskunde (Thema: Johann Bernoulli).

b Logica en grondslagen.

c Discrete wiskunde.

d Algebra en Meetkunde (Getaltheorie rond Kurt Mahler).

e Stochastiek en Statistiek (Kansrekening en Statistiek, Waarheen?).

f Numerieke wiskunde (Numerieke Wiskunde in de industrie).

g Mathematische Fysica.

h Systeem- en regeltheorie (Wiskunde uit de praktijk van systeem- en regeltheorie).

i Industriële en toegepaste wiskunde (Wiskunde toegepast in de industrie).

j Wiskunde en ontwikkelingsvraagstukken.

Lerarensymposium
Speciaal voor leraren wordt op donderdagmiddag een Symposium gehouden, gecoördineerd door dr. A. van Streun (RUG) en dr. J. Top (RUG), over
De nieuwe wiskundeprogramma's in de bovenbouw havo-vwo, Tweede Fase.

Verder zijn er parallelle secties met voordrachten op aanmelding (duur 20 minuten), computerdemonstraties, films en een boekententoonstelling.

Certificaat, aanmelding en kosten
Voor deelname op donderdag wordt door het Instituut voor de Lerarenopleiding van de RUG een nascholingscertificaat toegekend. Aanmelding dient voor 1 april 1995 schriftelijk te gebeuren op onderstaand adres. Gelieve de volgende gegevens te vermelden: naam en adres, geboortedatum en -plaats, de school waar u werkt, de dag(en) waarop u aanwezig zult zijn en of u op deze dag(en) een lunch wenst. De inschrijvingskosten bedragen voor leraren ƒ 15,–. De lunch (facultatief) kost ƒ 10,– per keer. Het totaalbedrag dient gelijktijdig met de inschrijving te worden overgemaakt op girorekening 3012682 t.n.v. 31ste Nederlands Mathematisch Congres 1995 te Groningen. Voor nadere informatie kunt u contact opnemen met dr. J.A. van Maanen (secretaris Congrescommissie).

Congrescommissie Nederlands
Mathematisch Congres 1995,
p.a. Vakgroep Wiskunde,
Rijksuniversiteit Groningen,
Postbus 800, 9700 AV Groningen.
Tel.: 050-633977,
E-mail: NMCongres@ math.rug.nl

Boekbespreking

Klaus Wagner/Rainer Bodendiek
Graphentheorie I en II, BI Wissenschaftsverlag Mannheim;
272 bladzijden; DM 38
resp. 368 bladzijden; DM 54

Je kunt het uit de titel niet opmaken, maar dit is zeker geen elementaire inleiding in de graphentheorie. Zoals uitgebreide ondertitels aangeven, gaat het om nogal specialistische behandeling van enkele onderwerpen: inbeddingen van graphen in oppervlakken (i.h.b. het gewone vlak), beschrijving van groepen door middel van de zogenaamde Sachs-triangulatie en Hasse-graphen van partiële ordeningen, om de voornaamste te noemen. Het boek heeft het karakter van een nogal heterogene verzameling overzichtsartikelen en grote stukken zijn door anderen dan de auteurs geschreven (van deel I zelfs twee derde). Het lijkt mij dan ook vooral geschikt voor wie zich, gesteund door enige ervaring op dit terrein, verder wil ontwikkelen in een van de behandelde specifieke gebieden.

Er staan een heleboel dingen in. Om een (vluchtige) indruk te geven noemen we er een paar.

1 De bekende stelling van Kuratowski. Deze leert, dat een eindige graph dan en alleen dan in het vlak kan worden ingebed (i.e. getekend zonder dat ribben andere punten dan gemeenschappelijke eindpunten gemeen hebben) als er geen volledig graph K_5 en geen volledige bipartite graph $K_{3,\,3}$ ‘in zit’ (in een welbepaalde zin). Als het kan, kan het ook zo dat alle ribben rechte lijnstukken worden. De twee genoemde ‘verboden’ graphen vormen nu een zogenaamde minimaal-basis voor het probleem, een begrip dat hier sterk centraal staat. Voor het analoge probleem bij de torus omvat zo’n basis meer dan 800 graphen.

2 Als een verzameling partieel geordend is door een relatie $<$ kun je daarbij een Hassediagram maken: een pijl van a naar b als $a < b$ 'zonder mogelijke tussenstap', i.e. er is geen c met $a < c < b$. Vervang de pijlen door ongerichte ribben en je krijgt een Hasse-graph (niet een Masse-graph, zoals op de buitenkant van deel II staat). Neem als voorbeeld de verzameling der 8 deelverzamelingen van $\{1, 2, 3\}$ met de relatie $\subset$. De Hassegraph is de kubusgraph. Beginnen met $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ geeft de graph van de 5-dimensionale kubus. Zo rijzen vragen als: welke graphen kunnen als Hasse-graphen optreden (een nog onopgelost probleem, maar zeker niet alle) en: wat kun je zeggen over graphen die zekere karakteristieken met kubusgraphen gemeen hebben.

3 Neem een verzameling D van natuurlijke getallen en een verzameling K van gehele getallen. Maak een graph op K door twee punten te verbinden als hun absolute verschil in D ligt. Hier is het antwoord op de vraag: welke graphen treden zo op, bekend (alle!).

De uitvoering van het boek doet nogal archaïsch aan: het is gekopieerd van gewoon typemachineschrift. De aard van de onderwerpen brengt mee dat diverse hoofdstukken vrij gecompliceerd zijn. Helaas krijg ik niet de indruk dat overal getracht is de zaak zo helder mogelijk te presenteren. Er zijn (in haast?) nogal wat onduidelijkheden ingeslopen, terwijl op andere punten de te grote omslag eerder bij gesproken tekst lijkt te passen. Een flinke kluif voor echte liefhebbers.

R.H. Jeurissen

Boekbespreking

Erhard Scholz (red.)
Geschichte der Algebra
Band 16 van de serie Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik.
Wissenschafsverlag Mannheim
ISBN 3-411-14411-4
520 bladzijden; DM 58

Wie zich eenmaal een zeker inzicht heeft verworven, kan zich gewoonlijk nauwelijks meer voorstellen hoe het was toen men nog in het duister tastte. Docenten moeten niettemin vrijwel dagelijks die kloof overbruggen. De studie van de geschiedenis kan daarbij helpen. De wetenschap dat het wiskundigen vele jaren heeft gekost om te wennen aan 'simpele' zaken als letterrekenen en negatieve getallen kan ons op zijn minst geduldiger maken. Een Geschiedenis van de Algebra, blijkens het voorwoord met name met het oog op docenten en studenten voor het leraarschap geschreven, sla ik dan ook nieuwsgierig open.

Het is een degelijk boek en er staat veel in. Een tiental auteurs, onder wie ook 'onze' Henk J.M. Bos, heeft onder leiding van Erhard Scholz elk één of twee hoofdstukken geschreven: hier zijn specialisten aan het werk. Het begint bij Babylonische en Egyptische problemen die wij onder algebra rangschikken - het woord algebra is een verbastering van een term uit de Arabische wiskunde en stamt dus van na de 8e eeuw - en het besluit met korte paragrafen over Bourbaki en codetheorie, na 1945 dus. Daartussen vindt men de hele ontwikkeling van de algebra in West-Europa beschreven, waarbij de Arabische wiskunde vanwege haar invloed op de onze wèl en de Indische en Chinese wiskunde niet aan bod komt. Gaat het tot de 17e eeuw alleen om het oplossen van (stelsels van) vergelijkingen, vanaf dan komen ook toepassingen binnen de waarschijnlijksheidsrekening (zoals bij Huygens), de getallenleer (met onder meer Fermat en Euler) en de meetkunde (verband tussen oplossingen van vergelijkingen en snijpunten van krommen) aan bod, terwijl vanaf de 19e eeuw onze 'moderne' algebra en ook de lineaire algebra ruim aandacht krijgt. Door enkele hoofdstukken heen loopt het enkele eeuwen durende gewenningsproces aan complexe getallen.

Zoals te verwachten houdt de ene schrijver meer of anders rekening met zijn publiek dan de andere; in het algemeen vind ik dat de afstemming op een onbekend lezerspubliek het collectief goed is gelukt. Verhelderende noten, een literatuur- en bronnenoverzicht, en een zaken- en personenregister completeren het boek. Drukfouten ben ik zelden tegengekomen en ook de illustraties hebben de nodige aandacht gekregen. Zaken waarvan de behandeling in de tekst het betoog teveel zou onderbreken, worden hier en daar in een apart kader behandeld.

Een opmerking die men niet alleen bij deze, maar bij de meeste andere studies op het gebied van de geschiedenis van de wiskunde kan maken, is dat ze gewoonlijk geen verband leggen met de cultuurgeschiedenis in het algemeen. Het werk van François Viète lijkt mij beïnvloed door de grotere bekendheid die de Griekse wiskunde in zijn tijd kreeg. Euler en Cauchy zijn ook in hun stijl van wiskunde bedrijven kinderen van hun tijd. Ik denk dat het onderwijs - en dit boek is voor docenten geschreven - bij het leggen van zulke dwarsverbanden zou winnen.

Rest de vraag wat het nut van dit boek kan zijn voor Nederlandse wiskundedocenten. Direct nut is er niet. In ons programma zit maar heel weinig algebra meer. Vrijwel alles wat hier wordt besproken is dan ook voor een leerling van ons voortgezet onderwijs veel te moeilijk. Wie leuke voorbeelden zoekt bij zijn of haar lessen zal dan ook nauwelijks iets vinden. Voor wie zelf geïnteresseerd is in algebra biedt het boek heel veel. Het inzicht in ontstaan en perceptie van ideeën dat het biedt zal, als afgeleide, de docent zeker te stade komen.

Jan Verhoef

Boekbespreking

R.L. Borelli, C.S. Coleman, W.E. Boyce
Differential Equations Laboratory Workbook
A Collection of Experiments, Explorations and Modeling Projects for the Computer.
John Wiley & Sons, Inc., New York
£16,50

Dit boek bestaat uit 81 computerexperimenten voor evenzoveel problemen. Het is bedoeld als ondersteuning bij het onderwijs van gewone differentiaalvergelijkingen (hieronder DVn genoemd). De gedachte is dat plaatjes van oplossingen vaak veel meer vertellen dan formules. Daarnaast biedt de computer de mogelijkheid om minder triviale praktijkproblemen op te lossen. De hoop is dat dit de interesse van de student wekt voor de achterliggende theorie.
Elk hoofdstuk heeft een inleiding op het thema van de experimenten en elk experiment is gestructureerd opgezet. Belangrijke begrippen zijn vetgedrukt en bij elk onderdeel van een experiment is m.b.v. een icoon aangegeven of het hand- dan wel computerwerk is.

Hieronder volgt per hoofdstuk een opsomming van de behandelde onderwerpen met tussen haakjes enkele van de daarin voorkomende toepassingen:

1, 2 graphische representatie, numerieke verschijnselen, existentie en stabiliteit (vervaltijden radioactieve stoffen)
3 eerste orde DVn: het superpositie principe, singulariteiten, separatie, exacte DVn, coördinaten-transformaties (logistische DV, chemische reacties)
4 tweede orde DVn: gedempte trillingsverschijnselen, frequency response modeling, niet lineaire veren, elektrische RLC circuits
5 gekoppelde eerste orde systemen in twee dimensies: evenwichtspunten, periodieke oplossingen, stabiliteit, Lyapunov functies, Hopf bifurcaties (prooi-roofdier model, de slinger, planeetbanen)
6 hoger dimensionale systemen (loodvergiftiging, Lorenz attractor, chaos in een nietlineair elektrisch circuit).

Aan het eind van het boek volgen een aantal aardige appendices over verslaglegging en mathematische modellering en een met voorbeelden.

Uit bovenstaande opsomming zal duidelijk zijn dat het niveau van dit boek dat van het vwo ver overstijgt, maar voor het wiskundeonderwijs op het hbo zullen een aantal experimenten zeker nuttig zijn. Docenten in het vwo en hbo kunnen zelf veel plezier aan dit boek beleven. ‘Spelenderwijs’ kan men met dit werkboek veel inzicht in het gedrag van oplossingen van DVn verwerven.

Het boek wordt samengehouden door een ringband en elke bladzijde is geperforeerd (vermoedelijk om het uit te kunnen scheuren voor het verslag). De lay-out en de verzorging van deze uitgave is zonder meer goed, zodat het boek zijn prijs waard is.

F.W. Wubs

Verschenen

M. Sniedovich
Dynamic Programming
Marcel Dekker
$ 114.50; 432 bladzijden
ISBN 0-8247-8245-3

Het doel van de schrijver is te laten zien dat dynamisch programmeren is gebaseerd op een verzameling inzichtelijke concepten en eenvoudige technieken. Het eerste deel behandelt het mathematisch idioom en een aantal technieken.
In deel 2 ligt de nadruk op het construeren van een (voor dynamisch programmeren) geschikt model bij praktijksituaties. Speciale aandacht krijgt daarbij de rol van de toestandsvariabele, uitmondend in een discussie van het ‘Principle of Optimality’ en Bellman’s opvatting van dit vakgebied.
Deel 3 legt het verband tussen de ontwikkelde oplossingsmethoden en modelleringsmethoden.

Richtlijnen voor auteurs

Aanleveren
Kopij dient bij voorkeur te worden aangeleverd op een diskette (3,5 of 5,25 inch) in WP5.1 (MS-DOS) of ASCII-bestand. Gedrukte of geschreven kopij kan vertraging opleveren. De tekst mag geen lay-out bevatten. De tekst moet zo kaal mogelijk worden aangeleverd, zonder woordafbrekingen e.d.; geef alinea's wel met harde returns aan.
Lever bij de diskette altijd een drietal afdrukken van de tekst aan, waarop bijvoorbeeld staat aangegeven waar u de illustraties had gedacht.

Tekst
Maak een korte, bondige titel; vermeld de naam van de auteur zonder eventuele titels. Paragrafen worden aangeduid met korte tussenkoppen (maximaal 23 aanslagen); per kopje vervallen er 4 regels basistekst.
De basistekst komt in een 3-koloms stramien. Een volle pagina telt $3 \times 54 = 162$ regels van 35 aanslagen per regel.
Wiskundige artikelen komen in een 2-koloms stramien. Een volle pagina telt hier $2 \times 54 = 108$ regels van 58 aanslagen per regel.

Illustraties
Voorzie uw tekst van toepasselijke illustraties.
Tekeningen, grafieken: scherpe figuren met zwarte pen of inkt gemaakt, of geprint op een goede printer.
Tabellen: scherp origineel op apart vel aanleveren.
Foto's: liefst zwart/wit met scherp contrast.
Voorzie illustraties van een verklarend bijschrift (op apart vel; bij meer illustraties zowel de illustraties als de bijschriften nummeren). Indien een illustratie op een bepaalde plaats in de tekst moet worden opgenomen dient dit duidelijk te worden aangegeven.

Verschijningsdata van Euclides
Omstreeks de 1e van de maanden september, december en mei; omstreeks de 15e van de maanden oktober, januari, februari, maart en juni.
Kopij voor het volgend nummer moet uiterlijk 10 weken voor verschijning geaccepteerd zijn door de redactie; voor de acht middenpagina's (in artikelen voor deze bladzijden mogen geen illustraties, tabellen of formules voorkomen!) geldt een termijn van 7 weken.

Adressen van auteurs

A.F.S. Aukema-Schepel
Buitenplaats 77
8212 AC Lelystad

C. Lagerwaard en J.J. Breeman
de Genestetlaan 94
2741 AG Waddinxveen

H.W. Broer
RUG, vakgroep Wiskunde
Postbus 800
9700 AV Groningen

L. van den Broek
Graafseweg 387
6532 ZN Nijmegen

H. Broekman
IVLOS
Princetonplein 1
3584 CC Utrecht

J.M. Buhrman
van Dijkstraat 10
1111 ND Diemen

M.C. van Hoorn
Noordersingel 12
9901 BP Appingedam

G. de Jong
Hannie Schaftstraat 14
4333 CK Middelburg

J. Koekkoek
Stullenbaan 34
1602 JC Enkhuizen

Kalender

3 en 4 februari 1995
Noordwijkerhout

Nationale Wiskunde Dagen

14 februari 1995
Rotterdam

Regiobijeenkomst NVvW
(zie bladzijde 124)

15 februari 1995
Utrecht

Bestuursvergadering NVvW

16 februari 1995
Amsterdam

Regiobijeenkomst NVvW
(zie bladzijde 124)

21 februari 1995
Zwolle

Regiobijeenkomst NVvW
(zie bladzijde 124)

23 februari 1995
Eindhoven

Regiobijeenkomst NVvW
(zie bladzijde 124)

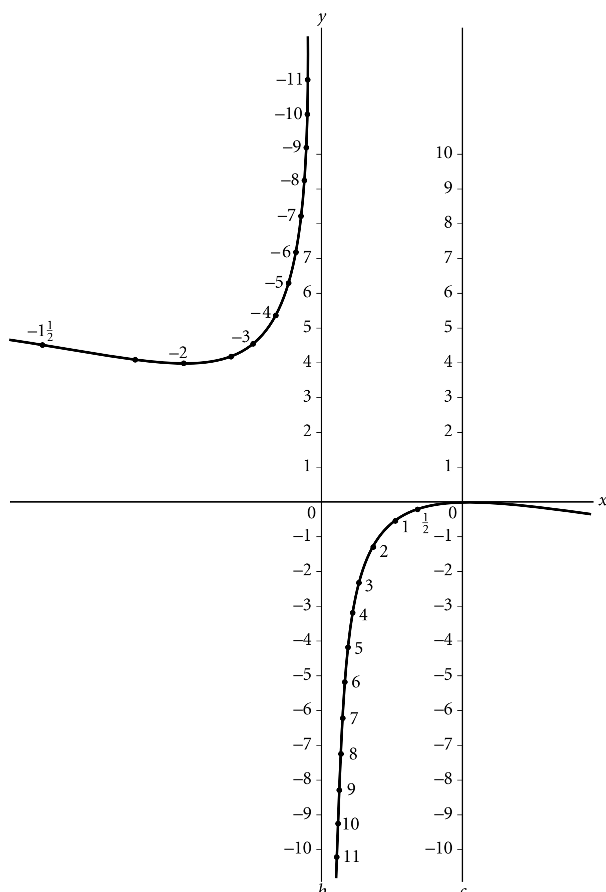
11 november 1995
Bilthoven

Jaarvergadering/Studiedag NVvW

Nomogrammen voor vierkantsvergelijkingen

Leon van den Broek

Nomogrammen

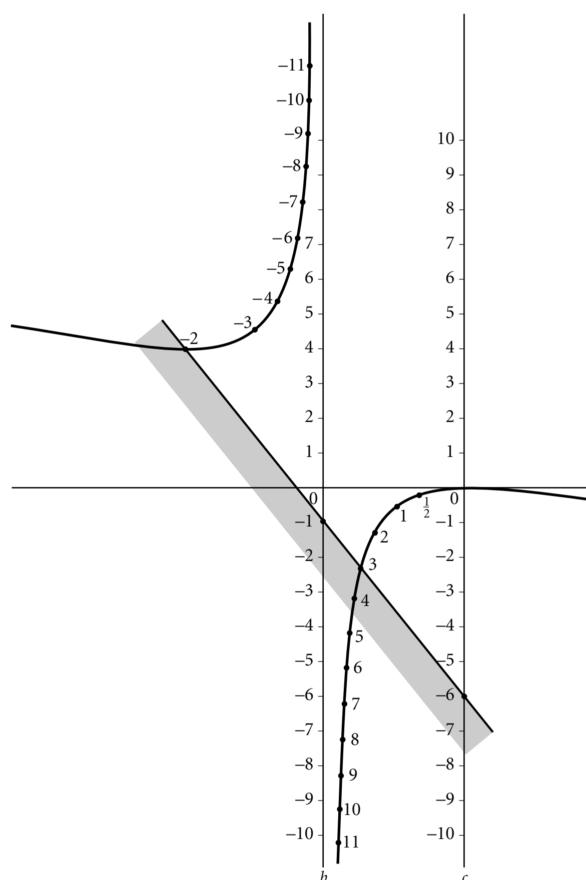


Figuur 1

In het Techniek Museum te Delft treft men het nomogram van figuur 1 aan voor het oplossen van vierkantsvergelijkingen. Het nomogram staat al bij *d'Ocagne*, de grondlegger van de nomografie. Precies hetzelfde nomogram heb ik gevonden in een oud prisma-boekje: *Wiskundige capriolen* van J.S.Meyer, nr. 827, 1963. Het tijdschrift *Pythagoras* heeft eens een heel nummer gewijd aan nomogrammen (jaargang 3, nr. 6), waarin weer het Delftse nomogram voorkomt. Wat voor kromme is het eigenlijk ? Zijn er ook andere krommen mogelijk ?

In het algemeen kun je zeggen dat een nomogram een figuur is waarin je oplossingen (van vergelijkingen) kunt aflezen. Dus gewoon een praktisch hulpmiddel. Nomogrammen komen in het wiskundeonderwijs in Nederland voor zover ik weet niet voor, terwijl ze minstens als illustratie gebruikt kunnen worden. Helaas is het voor leerlingen niet gemakkelijk in te zien waarom een nomogram als het Delftse werkt. In dit artikel zal ik de achtergronden van het Delftse nomogram belichten. Bovendien geef ik twee alternatieve nomogrammen.

Gebruiksaanwijzing



Figuur 2

Gegeven is een vierkantsvergelijking, herleid op 0. Eerst zorgen we ervoor dat de *kop-coëfficiënt* (die van x^2) 1 is.

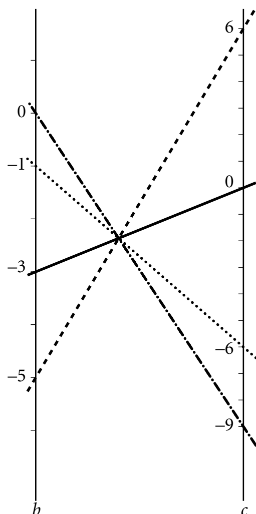
Aan de hand van de vergelijking $x^2 - x - 6 = 0$ leg ik uit hoe het Delftse nomogram werkt; zie figuur 2.

- Zoek op de *b*-as het getal -1 en op de *c*-as het getal -6.
- Leg een liniaal langs de twee gevonden getallen.
- Kijk waar de liniaal de kromme snijdt en lees daar de oplossingen van de vierkantsvergelijking af.

Als de liniaal de kromme niet snijdt is er geen oplossing; in geval van raken is er één oplossing.

De constructie

We tekenen twee evenwijdige assen: de *b*-as en de *c*-as, beide met een lineaire schaalverdeling.
We bekijken de tweedegraads-polynomen met kop-coëfficiënt 1 (ik noem dat *TP*'s); bijvoorbeeld $x^2 - x - 6$. Bij dit *TP* hoort de rechte lijn die de *b*-as in het punt -1 snijdt en de *c*-as in het punt -6.
Laten we nu eens alle *TP*'s bekijken waarvan het getal 3 een nulpunt is. We kiezen hieruit twee speciale *TP*'s: bijvoorbeeld: $P = x^2 - 3x$ en $Q = x^2 - 9$. Elke andere *TP* waarvan 3 een nulpunt is, is van deze twee een affiene combinatie: $a \cdot P + b \cdot Q$ (*affien* wil zeggen dat $a + b = 1$). Bijvoorbeeld: $x^2 - x - 6 = \frac{1}{3} \cdot P + \frac{2}{3} \cdot C$ en $x^2 - 5x + 6 = \frac{5}{3} \cdot P + -\frac{2}{3} \cdot C$. In figuur 3 zijn de bijbehorende lijnen getekend. Zo te zien gaan ze door

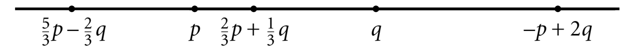


Figuur 3

één punt. Ons probleem is te bewijzen dat alle lijnen bij *TP*'s met nulpunt 3 door één punt gaan. Dat ene punt ligt dan op de kromme die we zoeken (het eigenlijke nomogram) en bij dat punt schrijven we dan het getal 3. Door hetzelfde te doen voor andere nulpunten, ontstaat het nomogram. Voor het bewijs dat alle lijnen bij *TP*'s met nulpunt 3 door één punt gaan, moeten we eerst wat voorbereidend werk verrichten.

Over affiene combinaties

Laat *p* en *q* twee (verschillende) getallen zijn op een getallenlijn. Elk getal *r* op de getallenlijn is dan op precies één manier te schrijven als affiene combinatie van *p* en *q*, dat wil zeggen in de vorm $\alpha p + \beta q$ waarbij



$\alpha + \beta = 1$.

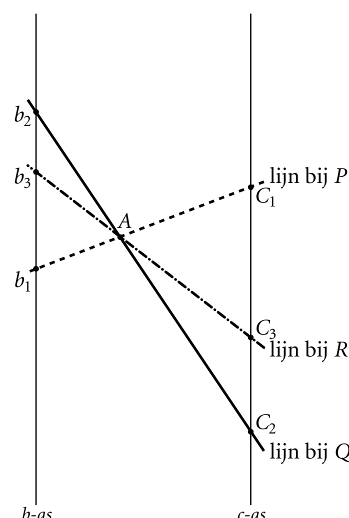
Figuur 4

De coëfficiënten α en β zijn eenvoudig te geven:

$\alpha = \frac{q - r}{q - p}$ en $\beta = \frac{r - p}{q - p}$.

In figuur 4 zijn enkele voorbeelden aangegeven (bij een lineaire schaal).

We bekijken nu twee evenwijdige assen, beide met een lineaire schaalverdeling. Op beide assen zijn twee getallen gegeven: b_1 en b_2 op de ene as en c_1 en c_2 op de andere as. Het snijpunt van de lijnen b_1b_2 en c_1c_2 noemen we *A*.
Lemma: Als b_3 een affiene combinatie is van b_1 en b_2 en c_3 een affiene combinatie is van c_1 en c_2, dan gaat de lijn b_3c_3 door A dan en slechts dan als de coëfficiënten in de affiene combinaties hetzelfde zijn.
Met gelijkvormigheid van driehoeken is dit lemma



gemakkelijk te bewijzen.

Figuur 5

Twee beweringen

$P = x^2 - 3x$ en $Q = x^2 - 9$ zijn twee *TP*'s met nulpunt 3. In figuur 5 zijn de bijbehorende lijnen b_1c_1 en b_2c_2 getekend, met hun snijpunt A.
We bewijzen twee beweringen:

1 *Als R een TP is met nulpunt 3, dan gaat de bij R behorende lijn door A.*
2 *Als een lijn door A gaat, dan heeft het bij die lijn behorende TP nulpunt 3.*

Het bewijs van (1):
Een *TP* R met nulpunt 3 is van de vorm: $(x-3)(x-r) = x^2-(3+r)x+3r = (1+\frac{1}{3}r)\cdot P + -\frac{1}{3}r \cdot Q$. Dus R is een affiene combinatie $\alpha \cdot P + \beta \cdot Q$, met $\alpha = 1 + \frac{1}{3}r$ en $\beta = -\frac{1}{3}r$. Maak met deze coëfficiënten een affiene combinatie van b_1 en b_2 op de b-as, en van c_1 en c_2 op de c-as: $b_3 = \alpha \cdot b_1 + \beta \cdot b_2$ en $c_3 = \alpha \cdot c_1 + \beta \cdot c_2$. De bij R behorende lijn is b_3c_3 die volgens het lemma inderdaad door A gaat.

Bewijs van (2):
Laat b_3c_3 een lijn door A zijn. Het bijbehorende *TP* is $R = x^2 + b_3x + c_3$. Volgens het lemma is b_3 een affiene combinatie van b_1 en b_2 en is c_3 een affiene combinatie van c_1 en c_2 met dezelfde coëfficiënten.
Zeg $b_3 = \alpha \cdot -3 + \beta \cdot 0$ en $c_3 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot -9$.
Dus: $R = x^2 + (\alpha \cdot -3 + \beta \cdot 0)x + \alpha \cdot 0 + \beta \cdot -9 = \alpha(x^2 - 3x + 0) + \beta(x^2 + 0x - 9) = \alpha \cdot P + \beta \cdot Q$.
Omdat P en Q beide nulpunt 3 hebben, heeft ook R nulpunt 3.

De *b*-as en *c*-as moeten evenwijdig gekozen worden, anders kunnen we het gelijkvormigheidsargument voor het lemma niet gebruiken. De schalen op de *b*-as en *c*-as moeten lineair zijn, ook weer vanwege het lemma. Maar de schalen hoeven niet hetzelfde te zijn. Je mag dus de nulpunten en de eenheden op de assen willekeurig kiezen.

De berekening

Gegeven zijn in $\mathbb{R}_2$ twee evenwijdige assen, de b-as en c-as, beide met een lineaire schaal. We kiezen twee speciale *TP*'s met 3 als oplossing: $x^2 - 3^2$ en $x^2 - 3x$. We stellen voor de bijbehorende lijnen een vergelijking op in $\mathbb{R}_2$. Vervolgens berekenen we het snijpunt van deze lijnen. Dat kunnen we algemeen doen: in plaats van 3 kunnen we elk ander getal nemen. Zodoende krijgen we een verzameling snijpunten. Tenslotte zoeken we een vergelijking voor de kromme waar al deze snijpunten op liggen. Die kromme is het eigenlijke nomogram.

Het is handiger het rekenwerk met vectoren in plaats van met coördinaten uit te voeren.

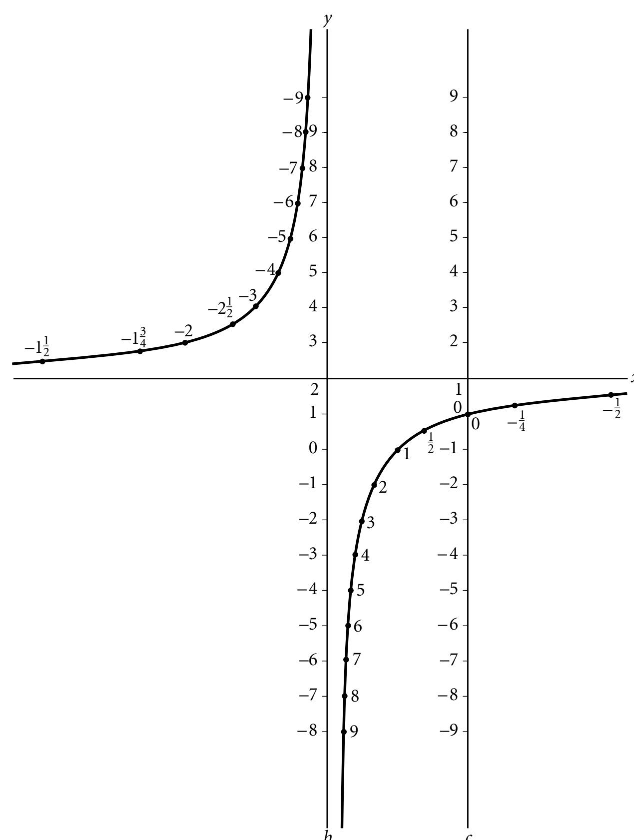
Welke (evenwijdige) assen en welke (lineaire) schalen je ook kiest, je krijgt altijd hyperbolen als nomogram (waarvan de b-as asymptoot is). Er is altijd één nulpunt dat geen plaats krijgt op het nomogram; dat zou namelijk het oneindige punt worden van een asymptoot van de hyperbool (niet de b-as, maar de andere asymptoot).

Het Delftse nomogram

De b-as is de y-as, met 0 in (0, 0) en 1 in (0, 1). De c-as is de lijn $x = 4$, met 0 in (4, 0) en 1 in (4, 1).
Het nomogram is de hyperbool met vergelijking $4xy = -(4-x)^2$. De oplossing r staat in het punt

$\left(\frac{4}{1+r}, \frac{-r^2}{1+r}\right)$.

Een orthogonale hyperbool



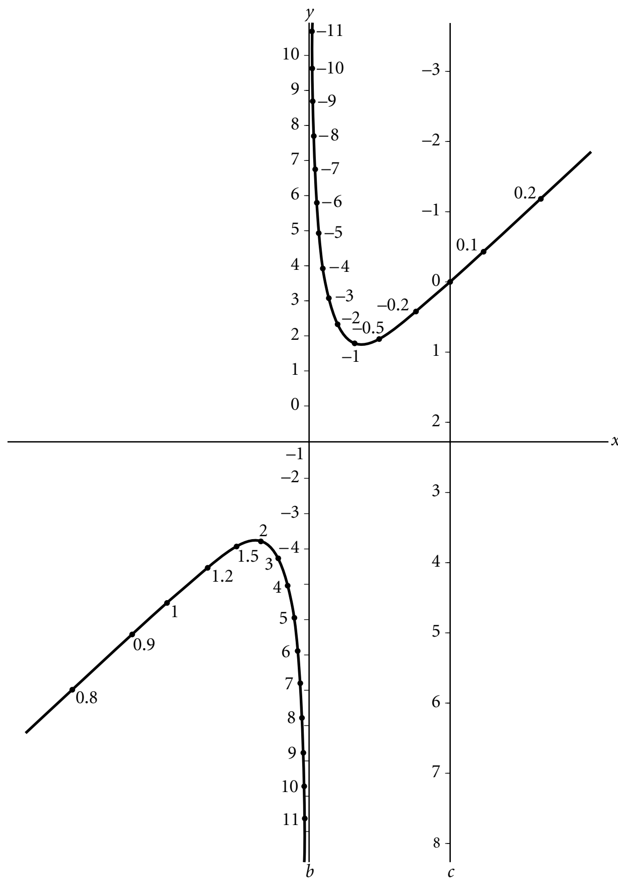
Figuur 6

Zie figuur 6. De b-as is de y-as, met 2 in (0, 0) en 3 in (0, 1). De c-as is de lijn $x = 4$, met 1 in (4, 0) en 2 in (4, 1). De kromme is de hyperbool met vergelijking

$xy = -4$. De oplossing r staat in het punt

$\left(\frac{4}{1+r}, -(1 + r)\right)$.

Een scheve hyperbool



Figuur 7

Zie figuur 7. De b-as is de y-as, met -1 in $(0, 0)$ en 0 in $(0, 1)$. De c-as is de lijn $x = 4$, met 1 in $(4, 2\frac{1}{2})$ en 0 in $(4, 4\frac{1}{2})$. De kromme is de hyperbool met vergelijking

$$y = x + \frac{2}{x}.$$

De oplossing r staat in het punt

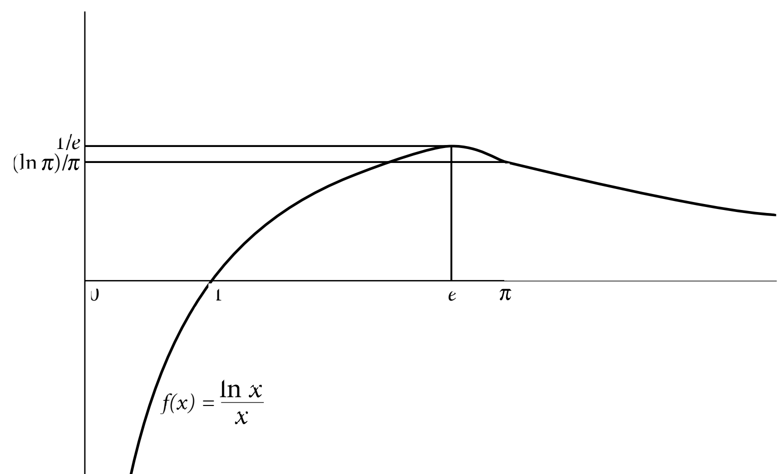
$\left(\frac{4}{1-2r}, \frac{4}{1-2r} - r + \frac{1}{2}\right)$.

Samenvatting

Nomogrammen nemen in de wiskunde een aparte plaats in. Het onderwijs heeft ze enigszins links laten liggen, hoewel ze uitstekend als illustratie gebruikt zouden kunnen worden. Nomogrammen kunnen onder andere worden toegepast bij het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen. Ze blijken in dat geval de vorm van een hyperbool te hebben. De auteur geeft in zijn artikel een verklaring voor dit feit met behulp van affiene combinaties van tweedegraads polynomen. Voor een aantal eenvoudige hyperbolen geeft hij aan in welk punt de oplossing van een tweedegraads vergelijking gezocht moet worden.

Bewijs zonder woorden (3):

$$\pi^e < e^\pi$$



(N.B. tekening is niet op schaal)

Ook stoeien met formules heeft mooie kanten

Gerrit de Jong

Directe aanleiding voor dit stukje is het artikel 'De afgeleide van $x \rightarrow 1/x$ meetkundig afgeleid' door Leon van den Broek in Euclides 70-1, september 1994. Zonder iets af te doen aan de schoonheid en aanschouwelijkheid van de gebruikte meetkundige methoden, wil ik wel opmerken dat juist *deze* methoden geïsoleerd staan in het wiskunde-B onderwijs op havo en vwo, terwijl de methoden met behulp van de produktregel en definitie regelmatig terug kunnen komen, zowel in het middelbaar onderwijs als op de vervolgopleidingen. Ik zal dit toelichten met enkele stukken uit wiskunde B-lessen in de havo- en vwo-bovenbouw.

Na wat 'Spielerei' met de richtingscoëfficiënt van koorden en raaklijnen komt de definitie van afgeleide:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Hiermee bepaal ik de afgeleide van f: $x \rightarrow x^2$, wat na het bekende schrijfwerk resulteert in $f'(x) = 2x$.

Een stukje les:

Zo kunnen we ook met behulp van de definitie de afgeleide bepalen van g: $x \rightarrow 3x + 1$, maar dat kan leuker.
De lijn $y = 3x + 1$ heeft overal de r.c. 3, dus is de r.c. van de raaklijn overal gelijk aan 3, dus $g'(x) = 3$.
We willen zo snel mogelijk af van het schrijfwerk, dus als het kan, doen we het slimmer. Hoe zouden we de afgeleide bepalen van h: $x \rightarrow x^2 + 3x + 1$? Zou dat ook met een plaatje kunnen, zoals bij g? Nee, jammer, dus zit er niets anders op dan maar weer te rekenen met de definitie. Je hoeft mijn verhaal nu niet over te schrijven, want het eindresultaat zal heel makkelijk op een andere manier gevonden kunnen worden, maar daarover later. Daar gaan we.

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \ldots$$

dat levert met het bekende rekenwerk $2x + 3$.

Hééé, wat leuk! Ja toch??? De klas komt er wel op dat $h' = f' + g'$ is, terwijl $h = f + g$ was. Zou dat altijd op deze makkelijke manier kunnen? Een beetje wiskundige kan het zich niet permitteren om na één voorbeeld (en zelfs niet na 317 voorbeelden) te zeggen dat het dus altijd wel zal kloppen, dus moet het bewezen worden. Hoe? Met de definitie! Want ik heb nog niet genoeg regels tot mijn beschikking. Daar gaat hij weer:
Als $h(x) = f(x) + g(x)$, dan is

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) + g(x))}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x))}{\Delta x} =$$

en nu komt er even een truc: wissel $g(x + \Delta x)$ en $-f(x)$ even om van plaats en maak er dan eens twee breuken van.

De leerlingen zien de rest vanzelf, zonder moeite.

Heeft dit gegoochel nu nut?

Ik denk het wel. In het vervolg van hun opleiding, zowel op de middelbare school als op het hbo of de universiteit, zullen onze leerlingen een goede (wiskundige) attitude moeten hebben. Als we op de middelbare school zelf een loopje nemen met de wiskundige gestrengheid, geven we niet zo'n best voorbeeld. We hoeven helemaal niet te eisen dat de leerlingen op een repetitie de afgeleide kunnen geven van f: $x \rightarrow x^2$ met behulp van de definitie, maar ze dienen wel te beseffen dat de gebruikte formules op *navolgbare* wijze bewezen zijn.

Later, als de produktregel behandeld wordt, laat ik ook weer met behulp van de definitie zien dat deze regel correct is. Ook nu wordt er weer uitdrukkelijk bij vermeld dat er een truc bij gebruikt is waarvan niet wordt verwacht dat ze er zelf op komen. Die truc hoeft ook niet geleerd te worden, hij staat geïsoleerd in het wiskundeonderwijs. Wel moeten ze de gedachtengang achter het bewijs kunnen volgen en dat lukt de meeste leerlingen heel aardig.

Na de produktregel komt het moment dat de quotiëntregel bewezen kan worden. Als voorloper hierop kan de afgeleide van $f: x \rightarrow 1/x$ of van $f: x \rightarrow 1/x^2$ bepaald worden op de volgende manier. De begeleidende tekst is wezenlijk en wordt zowel gezegd als opgeschreven op het bord.

$f: x \rightarrow 1/x^2$ we zijn op zoek naar f'.
Dit is hetzelfde als $y = 1/x^2$ we zijn op zoek naar y'.
Werk de breuk weg;
$y \cdot x^2 = 1$, we zijn nog steeds op zoek naar y'.
Ga het linker en rechter lid differentiëren, dat levert
$y' \cdot x^2 + y \cdot 2x = 0$ waarbij $y = 1/x^2$; we zijn op zoek naar y'.
$y' \cdot x^2 + 1/x^2 \cdot 2x = 0$
$y' \cdot x^2 = -2/x$
$y' = -2/x^3$ en we hebben y' gevonden!
En dus weten we nu dat $f'(x) = -2/x^3$

Hierna is met dezelfde methode en exact dezelfde begeleidende tekst het bewijs van de quotiëntregel te leveren. Dat dit geen geïsoleerd staande methode is zal blijken uit het vervolg. Doordat de functievergelijking vervangen is door de formule $y = 1/x^2$ is een bijkomend voordeel van deze methode, dat er een fraaie mogelijkheid is bijgekomen om te manipuleren met formules.
De natuurkundedocent is er je dankbaar voor en zelf kun je nuttig gebruik maken van de, voor de meeste leerlingen al bekende, overgangen $P \cdot V = C \rightarrow P = C/V$ en $I = U/R \rightarrow U = I \cdot R$ etc. wat ook de transfer tussen natuurkunde en wiskunde bevordert.

De vierde keer dat dezelfde methode gebruikt kan worden in de bovenbouw vwo is bij de bepaling van de afgeleide van $f: x \rightarrow \ln x$. Het getal e is al ingevoerd en dus is ook al bekend dat $f: x \rightarrow e^x$ zichzelf als afgeleide heeft. Verder is op dit moment de kettingregel ook al behandeld.

Weer een lesbeschrijving:
Bij de bepaling van de afgeleide van $f: x \rightarrow \ln x$ hoeft niet de definitie van afgeleide van stal gehaald te worden, want je weet dat ik, als ik moeizaam rekenwerk maar even kan vermijden, dat ook zal doen. Ga ik namelijk met behulp van de definitie

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

aan de slag, dan moet er altijd een limiet uitgerekend worden die bij zonder meer invullen van $\Delta x = 0$ uitkomt op 0/0. Hier moet dus weer de een of andere handigheid worden uitgehaald om deze limiet te berekenen. De stelling van De l'Hôpital werkt niet, omdat die pas gebruikt kan worden als f differentieerbaar is en f' bekend is. Maar er is wel een leuke manier; die zijn we al eens eerder tegengekomen.
We willen $f: x \rightarrow \ln x$ differentiëren
dus bij $y = \ln x$ willen we y' berekenen.
Nu is $y = \ln x$ gelijkwaardig met
$x = e^y$, we willen y' weten dus differentiëren we het linker en rechter lid. Dat levert
$1 = e^y \cdot y'$ (met $x = e^y$), we willen y' weten
$1 = x \cdot y'$
$y' = 1/x$ gevonden! Dus $f'(x) = 1/x$

Mijn leerlingen hebben geen enkel probleem dit bewijs zelf te produceren. Een enkeling moet even geholpen worden met het differentiëren van e^y. Door ook de afgeleide van $f: x \rightarrow \arctan x$ op deze manier te bepalen, krijgen de leerlingen aardig door waar ze mee bezig zijn, zonder dat het als een truc gezien wordt. Ik heb het idee dat ze door deze elegante bewijsmethoden meer 'inzicht' hebben gekregen in wiskunde, iets wat hun in hun vervolgopleiding maar al te goed van pas kan komen. Bij het hbo en de universiteit moeten ze toch ook kunnen bewijzen dat, $f^{inv}{}'(b) = 1/f'(a)$ als $f(a) = b$. Ik ben me er overigens goed van bewust dat dit laatste ook heel fraai meetkundig verduidelijkt kan worden en mijns inziens behoren de docenten van de vervolgopleidingen dat *ook* te doen, naast het bekende analytische bewijs.
Verder is het ook mooi meegenomen dat de leerlingen goed voorbereid worden op bijvoorbeeld de bewijzen met behulp van volledige inductie. Hierbij weet je iets (de inductieveronderstelling) en je weet waar je naar toe wilt. Het tussenliggende gedeelte is vaak wat gegoochel met formules. Mijn ervaring met Open-universiteit-studenten, die ik voor enkele wiskundecursussen begeleid, is dat ze vaak niet de grote lijn van zo'n bewijs zien. Volgens mij komt dat onder andere doordat ze op de middelbare school te weinig grote lijnen van bewijzen hebben gezien. Mijns inziens hebben studenten er meer aan dat op de middelbare school 'gestoeid' wordt met functies, formules en bewijzen, dan dat ze er op getraind worden een enkel bewijs (of meerdere bewijzen) geheel zelfstandig te kunnen reproduceren.

Gedachten en overwegingen in de didactiekcommissie

Opdrachten, verkapte opdrachten en echte vragen

Harrie Broekman

Een opgave als start

In de hieronder afgedrukte tekst staan vragen, waarop de vragensteller (de leerboekauteur, de leraar) al een antwoord weet. Het zijn vrij gesloten vragen met eenduidige, vastliggende antwoorden. Leerlingen versterken dat door te vragen wat ze nu precies in het schrift moeten opschrijven, nadat er in de klas op de eerste vraag de volgende antwoorden genoemd zijn:
- uitrekenen
- telkens 5 optellen
- iedere keer 5 erbij doen
- de getallen van de tafel van 5 uitrekenen
- gewoon, iedere keer een volgend getal
- oh, de tafel van 5.

1. DRUK DE VOLGENDE TOETSEN ACHTER ELKAAR IN, KIJK IN HET VENSTER WAT ER GEBEURT. SCHRIJF OP WAT JE ZIET.

AC	+	
	5	
	=	
	=	
	=	
	=	
	=	

WAT DOET DE REKENMACHINE

2. KUN JIJ NU DE REKENMACHINE DE TAFEL VAN 9 LATEN ‘OPZEGGEN’?

AC ...... ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ en zo verder

3. EN DE TAFEL VAN 37?

WELKE MOOIE TAFEL ZIE JE IN DE TAFEL VAN 37?

Op zich allemaal ‘goede antwoorden’ van de brugklassers. Zeker omdat de leerlingen een overstap moeten maken van het - bijna gedachteloos - uitvoeren van een aantal opdrachten (‘*opdrachtcultuur*’) naar het nadenken over een vraag (‘*vraagcultuur*’).
De overgang van een opdrachtcultuur naar een vraagcultuur vereist meer dan het vervangen
- van het woord ‘bereken’ door ‘hoeveel is …’
- van het woord ‘differentieer’ door ‘wat is de afgeleide van …’
- van de woorden ‘stel een vergelijking op’ door ‘wat is de vergelijking …’

Door het gebruiken van de taal van een vraagcultuur zijn dit geen echte vragen geworden.
Ze bedoelen toch gewoon ‘bereken’, ‘differentieer’, en ‘stel de vergelijking op’ zei een 5 vwo-leerling me.
Inderdaad.
Met de hierboven in vragen veranderde opdrachten is er nauwelijks ruimte voor de leerling (en de leraar?) om zich te richten op iets anders dan dat wat door Skemp genoemd is *instrumental understanding* (gericht op de enige goede manier; het kunnen uitvoeren van opdrachten).
Bovendien is dit het soort vragen waarop de leraar altijd het antwoord al weet. Dus de soort vragen die de autoriteit van de leraar (en de wiskunde) versterkt en daarmee misschien een van de oorzaken is van de zogenaamde ‘angst voor wiskunde’ (Sheila Tobias, Peter Hilton).
Wat we nodig hebben zijn duidelijke opdrachten, maar vooral ook ‘eerlijke’ vragen.
Leerlingen leren overigens vrij snel om vragen te vertalen in opdrachten.

Hoeveel bussen heb je nodig voor het schoolreisje? Er gaan 254 leerlingen mee en 18 leerkrachten. Per bus kunnen 48 personen vervoerd worden.

In deze opgave wordt ‘hoeveel’ vaak vertaald door ‘bereken’ en prompt krijgen we dan ook antwoorden als 5,29166..7 of 5,666...7.

In de volgende som bleken slechts enkele brugklassers ‘hoeveel’ te vertalen door ‘bereken’ en de reden daarvoor is voor mij een echte vraag. Hoe hebben ze gedacht, gewerkt, etc.? Overigens kwamen er nu wel meer antwoorden in de geest van ‘ik weet het niet’.

Hoeveel 3 cm bij 4 cm blokken kunnen rechtop staan in een rechthoekige doos met een bodem van 11 cm bij 17 cm?

Interessant zijn de gedachten van een 3 vwo-leerlinge over het voorgaande:

Er zijn ‘opdrachten’, ‘vragen’ en ‘echte’ vragen.
Bij ‘opdrachten’ weet je als leerling meestal waar je aan toe bent. Bij ‘vragen’ ga je direct doen wat ze willen dat je doet; de leraar weet het antwoord al en dus probeer je te bedenken wat hij wil horen. Het zijn dus eigenlijk verkapte opdrachten. Bij ‘echte’ vragen ga je als leerling aan het denken.
Leraren zeggen dat ze het leuk vinden als je gaat denken. Maar of ze dat echt zo vinden???

Het is goed de conclusies van de ervaringen van zo’n leerlinge te overwegen. Ze kan immers de zaken onderscheiden en zet ook nog eens een vraagteken bij de mening van leraren over het leuk vinden.
Bram Lagerwerf geeft in zijn boek ‘Wiskundeonderwijs in de basisvorming’ aan dat we van opdrachten naar vragen en zelfs naar ‘echte vragen’ kunnen gaan en daarmee ons onderwijs kunnen verrijken. Ik onderschrijf deze mening in het besef dat er een optimistische visie aan ten grondslag ligt: de visie dat leren door zelf in actie te komen niet alleen wenselijk is maar ook de moeite waard. Voor veel leraren is het een plezierige gedachte dat ze weer bezig kunnen gaan met het in stand houden en ontwikkelen van een onderzoekende houding bij de leerlingen. ‘Echte vragen’ horen daarbij! En is het niet spannend om veel onverwachte vragen te krijgen?

Een vraag over de serie opgaven aan het begin van dit artikel was een aanzet tot een klassegesprek waarin zowel van de kant van Maaike als van haar lerares ‘echte vragen’ gesteld werden.

Maaike:
Juf, wilt u opgave 3 ook uitleggen?
Juf: Zijn er meer leerlingen die ik daar een plezier mee doe?
Nieuwe LLN: 12 leerlingen steken hun vinger op.

Juf tegen M.: Hoe heb je 1 en 2 gemaakt?
Maaike: Gewoon, met de rekenmachine.

Juf: Oké, pak allemaal je rekenmachientje eens voor je.
LLN: En als je de sommen al hebt?

De eerste vraag van Maaike en die van de leraar zou ik willen aanduiden als ‘echte vragen’. Echt, omdat de vragensteller geïnteresseerd is (althans die indrukt wekt) in het antwoord en tevens zelf het antwoord op de vraag nog niet weet.
Maar dit zijn niet de enige aspecten van ‘echte vragen’.
Bij ‘echte vragen’ kan in ieder geval het volgende een rol spelen.

1 ze kunnen een leerproces op gang brengen;
2 er is interesse in het antwoord;
3 als vragensteller kan ik niet bij voorbaat zeggen wat het antwoord zal zijn;
4 desnoods houd ik *mijn* antwoord ‘openlijk’ achter;
5 er zijn vragen waarbij de vragensteller en de mogelijke beant-

woorder beiden niet bij voorbaat een antwoord weten (samen op zoek!);

6 voor het antwoord geldt niet altijd het criterium goed of fout.

Eén ding is zeker duidelijk: om een 'echte vraag' te zijn hoeft niet aan alle hier genoemde aspecten voldaan te zijn!
Het belangrijkste is misschien wel dat we duidelijk zijn over onze bedoelingen: 'vraag' of ' opdracht'.

Literatuur

Hilton, Peter; Jean Pederson, *Fear no More*, Addison-Wesley Publ., London, 1983

Lagerwerf, Bram; *Wiskundeonderwijs in de basisvorming*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1993.

Skemp, Richard; Goals of Learning and Qualities of Understanding. *Mathematics Teaching*, 88, sept. 1979.

Tobias, Sheila; *Overcoming Math Anxiety*, W. Norton, New York, 1978, 1993.

40 jaar geleden

908

Van trapezium $ABCD$ is $\angle A = \angle D = 90°$; $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{DC}$; $AB > DC$; $AB = a$; $BC + CD = 3a$. Wordt het trapezium om AB als as gewenteld, dan ontstaat een lichaam, waarvan het volume gelijk is aan dat van een bol met straal r. Hoe worden CD $(= x)$, BC $(= y)$ en AD $(= z)$ berekend?
Ga na voor welke waarden van r er één, opv. twee oplossingen mogelijk zijn.

909

Door een vast punt P binnen een bol (M, R) trekt men drie onderling loodrechte rechten. Bewijs, dat de som van de vierkanten der stukken van die koorden (gerekend van P tot de snijpunten met de bol) constant is.

910

Van ΔABC zijn de hoeken: $\angle A = 60° - x$, $\angle B = 60°$ en $\angle C = 60° + x$. Als de omtrek van de driehoek $2s$ is en $a \times c = k^2$, druk dan $\cos x$ uit in s en k. Bepaal het minimum van de verhouding $\frac{s}{k}$ $(k > 0)$.

911

a Los x op uit de vergelijking:
$\sin(4x + 18°) - \sec(3x - 54°) = 0$.

b In de vergelijking $\sin(x^2+1)\pi - \sin x\pi = 0$ stellen $(x^2+1)\pi$ en $x\pi$ voor elke waarde van x aantallen radialen voor. Gevraagd wordt een bespreking van het aantal wortels, als x ligt tussen $-\frac{3}{2}$ en $+\frac{3}{2}$.

J. Best

Vraagstukken uit Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 42, 1954-1955

De graphing calculator

Jan Koekkoek

Op de laatste schooldag (althans voor regio Noord) vóór de laatste zomervakantie had de Stichting Computer Algebra Nederland (CAN) te Amsterdam 's middags een demonstratie van de Graphing Calculator op de Power PC (Apple) georganiseerd. Ondanks de wat onzorgvuldige planning en het fantastische zomerweer hadden zich rond twee uur ongeveer tien belangstellenden verzameld rond het scherm van één Power PC. De verwachtingen waren dankzij de veelbelovende omschrijving en de plaatjes in de uitnodiging hoog gespannen.
De demonstratie in het Engels werd verzorgd door Ron Avitzur, de maker van de Graphing Calculator, en op dat moment te gast bij het Research Institute Applications of Computer Algebra (RIACA), het wetenschappelijk instituut van CAN.
De Graphing Calculator is een door Avitzur bij Apple ontwikkeld programma, dat standaard, dus gratis, wordt meegeleverd bij de Power PC. Het vervangt de standaard calculator (zoals we die kennen van de Mac en Windows), maar kan véél meer!
Bovendien hoeven geen handleidingen doorgeworsteld te worden en ingewikkelde commandoregels zijn ook overbodig. Nee, slechts het kunnen hanteren van een muis is een voorwaarde om met dit programma aan de slag te kunnen! Al heel snel krijgt men resultaten op het scherm en kan men functies, vergelijkingen en grafieken manipuleren. Dat achter deze schijnbare eenvoud een enorme rekencapaciteit en rekensnelheid (door de supersnelle Power PC chip) schuilgaan, blijft voor de gebruiker onzichtbaar. Wiskunde komt op deze manier wel heel dicht bij de gebruiker van het programma.
Voor het tekenen van een grafiek volstaat het intikken van een functievoorschrift of een vergelijking. Het programma ontdekt zelf of er 2- of 3-dimensionaal getekend moet worden. Men kan eenvoudig met de muis het assenstelsel verschuiven, in- of uitzoomen.
Komt in het voorschrift een parameter voor, dan verschijnt onderin het venster van de grafiek een schuif waarmee de parameter van waarde kan worden veranderd. Het resultaat van deze verandering is direct op het scherm te zien. Het wordt daardoor erg eenvoudig te zien wat het effect is voor de grafiek. Ook is het mogelijk om een domein voor de parameter aan te geven. Vervolgens gaat het programma continu de parameter in stapjes veranderen en is, als een soort filmpje, continu de verandering van de grafiek zichtbaar.
Ook vlakdelen tekenen gaat eenvoudig: het programma kan zonder meer overweg met ongelijkheden als bijvoorbeeld:
$y < x$, $x^2 + y^2 < 4$, $\sin x < \sin y$ of $\sin(4\cos r + 5\theta) < -0{,}3$.

Wat zwaardere opdrachten, zoals $r < \cos n \cdot \theta$, kosten meer tijd. Maar alle plaatjes voor de gekozen waarden van n worden opgeslagen in het geheugen, zodat ook nu het uiteindelijke resultaat als een film aan je voorbij trekt.
Uit de demonstratie bleek dat het programma vooral grafisch veel mogelijkheden heeft. Hier hebben we dan ook meteen de sterke kant van het programma gehad. Het oplossen van vergelijkingen geeft bijvoorbeeld grotere problemen. Met veel gekunstel lukt het soms wel, maar lang niet altijd. Uit $3x^2 + 6x - 3 = 0$ krijgt het programma als oplossing

$$x = \sqrt{\frac{-6x+3}{3}} = \sqrt{-2x+1}.$$

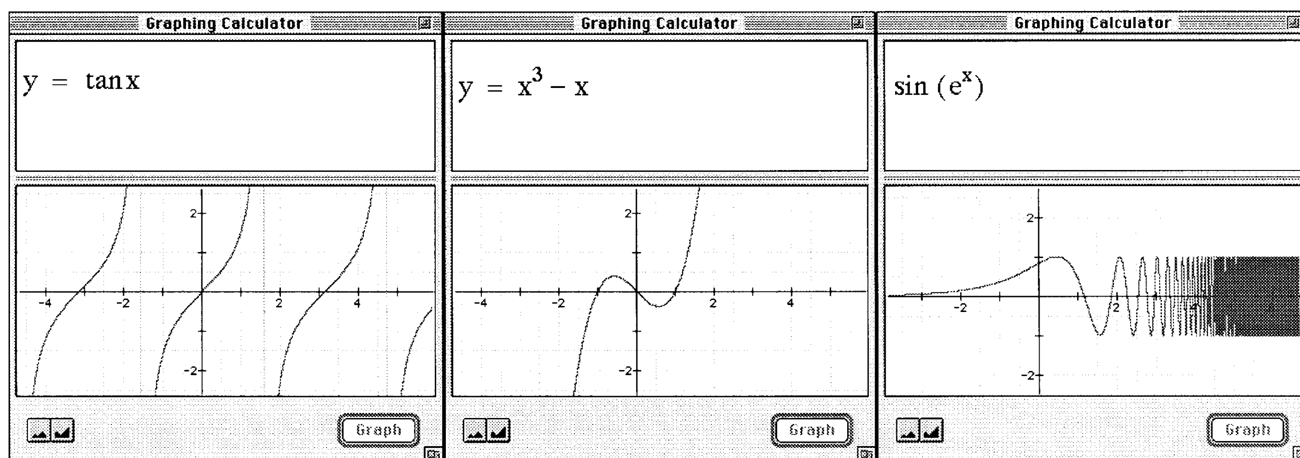
Wel is het weer mogelijk om dit grafisch op te lossen: de snijpunten met de x-as kunnen via een soort 'trace'-functie benaderd worden.

Alle aanwezigen waren overtuigd van de mogelijkheden van het programma. Leerlingen zullen er goed mee uit de voeten kunnen, maar dan vooral grafisch: snel zien hoe de grafiek van een functie eruit ziet en wat het effect van een parameter is.
Voor het oplossen van vergelijkingen is het programma ongeschikt. Andere wiskundige activiteiten zoals differentiëren en integreren zijn al helemaal niet voorhanden! Over het nut voor het onderwijs in Nederland hoeven we het hier eigenlijk al helemaal niet te hebben: het programma is gratis, maar werkt alleen in combinatie met een (relatief dure) Power PC. Zijn er al scholen in Nederland met een lokaal vol Power PC's?

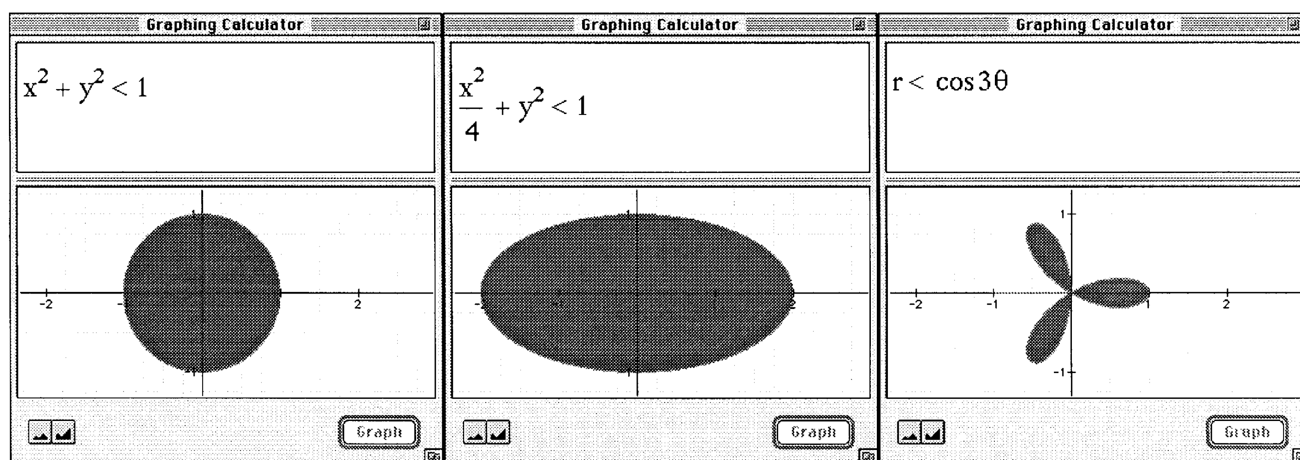
Noot

Telefonische informatie is te verkrijgen bij de Stichting CAN te Amsterdam: 020-5608400.

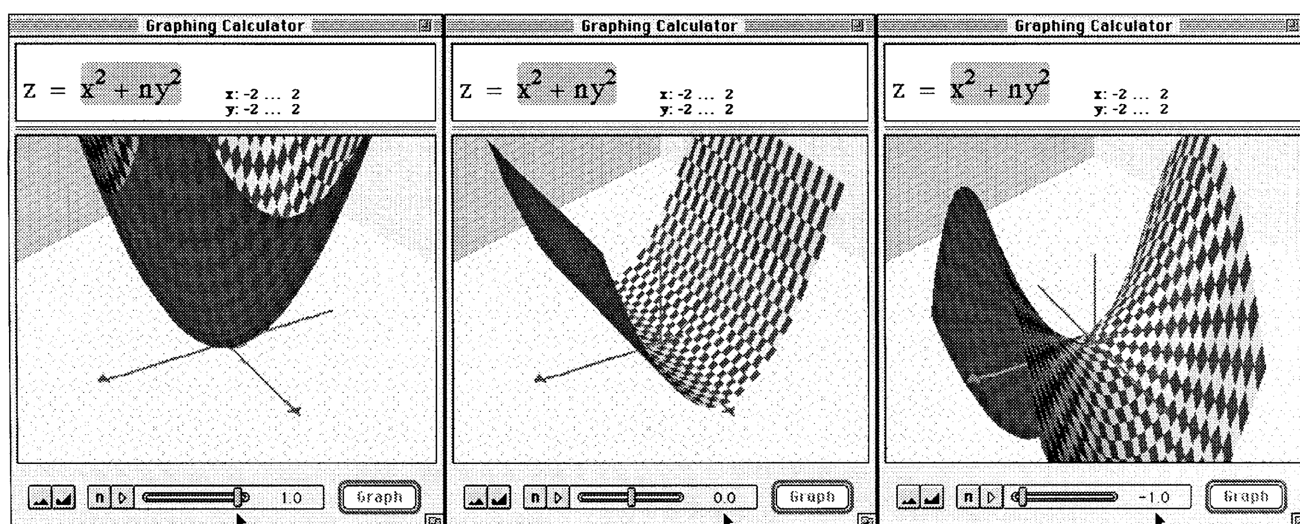
Examples from the Graphing Calculator



Examples of curves in two dimensions



Examples of inequalites in two variables



These slices of an animation show a paraboloid, a cylinder with parabolic cross section, and a saddle as instances of a family of surfaces parametrized by n as n varies between +1 and -1. This demonstrates visually the difference between positive and negative Gaussian curvature.

Recreatie

Oplossing 656

De som van de delers van 70 is 1 + 2 + 5 + 7 + 10 + 14 + 35 = 74. Omdat 74 > 70 wordt het getal 70 'abundant' genoemd.
Sierpinski noemde een getal 'pseudoperfect' als het getal te schrijven is als som van enkele van zijn delers. (Bijvoorbeeld 20 = 1 + 4 + 5 + 10.)
Benkoski noemde in 1972 een getal 'weird' als het abundant is, maar niet pseudoperfect. Nu blijkt dat 70 het kleinste weird getal is. Weird getallen zijn zeldzaam en het is, voor zover ik weet, niet bekend of er oneven exemplaren zijn ! Een mooie wiskundige eigenschap van ons jubileumgetal 70.
Meer informatie in het boek van Wells, waarvan ook een Nederlandse vertaling bestaat.

Een andere leuke eigenschap van 70 is: de vergelijking

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = n^2$$

heeft de unieke oplossing $k = 24$ en $n = 70$. Het bewijs is behoorlijk moeilijk en is al in 1918 gegeven.
Veel andere eigenschappen zijn door de lezers gevonden, die soms zijn terug te vinden in de referenties.
Een aardige vondst van *Kees Nagtegaal* (43), Dordrecht wil ik u niet onthouden: 70! is de kleinste faculteit die ERROR oplevert op de huidige rekenmachines.
Dank voor alle ingezonden eigenschappen. Hoewel sommigen kritisch waren over deze 'puzzel', leverde het toch weer een aantal nieuwe inzenders op. Welkom op de puzzelladder.

Referenties:
David Wells - *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers* (1986).
François le Lionnais - *Les nombres remarquables.*
Joe Roberts - *Lure of the Integers* (1992).
Dr. L.A. Snijders - *Alle getallen van de bijbel* (1978).

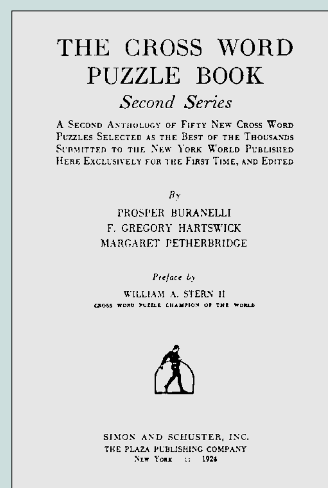
Deze maand is met 50 punten winnaar geworden van een boekenbon van *f* 25,–:

Ernst Grootveld
Hoekblok 36
2291 XW Wateringen

Hartelijk gefeliciteerd.

Opgave 659

Algemeen wordt aangenomen dat het allereerste kruiswoordraadsel is verschenen op 21 december 1913 in de zondagse bijlage FUN van The New York World. Vanaf die datum publiceerde Arthur Wynne zijn wekelijkse 'FUN's Word-Cross Puzzle'. Pas in 1923 verschijnt het moderne systeem van nummering. In Amerika is het al een rage. De rest van de wereld weet nog van niets (vanwege de Eerste Wereldoorlog ?). Op 10 april 1924 verschijnt het eerste puzzelBOEK 'The Cross Word Puzzle Book, First Series'. Men kreeg er een gratis VENUS potlood bij ! Binnen een paar maanden verscheen al de negende druk. Als curiositeit hiernaast een afdruk van het tweede boek dat al in juni 1924 verscheen.
Engeland heeft de primeur op 2 november 1924. In Nederland geeft Dr. Linkerhoek op maandag 12 januari 1925 een voorbeeld van een 'Kruiswoordenpuzzle' in het Algemeen Handelsblad. Op zaterdag 17 januari 1925 verschijnt dan het eerste echte kruiswoordraadsel zowel in het Algemeen Handelsblad als in Het Leven. Dat is deze maand precies 70 jaar geleden !



THE CROSS WORD PUZZLE BOOK

Second Series

A SECOND ANTHOLOGY OF FIFTY NEW CROSS WORD PUZZLES SELECTED AS THE BEST OF THE THOUSANDS SUBMITTED TO THE NEW YORK WORLD PUBLISHED HERE EXCLUSIVELY FOR THE FIRST TIME, AND EDITED

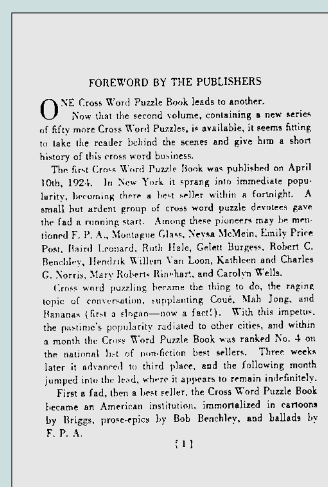
By

PROSPER BURANELLI
F. GREGORY HARTSWICK
MARGARET PETHERBRIDGE

Preface by

WILLIAM A. STERN II
CROSS WORD PUZZLE CHAMPION OF THE WORLD

SIMON AND SCHUSTER, INC.
THE PLAZA PUBLISHING COMPANY
NEW YORK :: 1924



FOREWORD BY THE PUBLISHERS

ONE Cross Word Puzzle Book leads to another.

Now that the second volume, containing a new series of fifty more Cross Word Puzzles, is available, it seems fitting to take the reader behind the scenes and give him a short history of this cross word business.

The first Cross Word Puzzle Book was published on April 10th, 1924. In New York it sprang into immediate popularity, becoming there a best seller within a fortnight. A small but ardent group of cross word puzzle devotees gave the fad a running start. Among these pioneers may be mentioned F. P. A., Montague Glass, Neysa McMein, Emily Price Post, Baird Leonard, Ruth Hale, Gelett Burgess, Robert C. Benchley, Hendrik Willem Van Loon, Kathleen and Charles G. Norris, Mary Roberts Rinehart, and Carolyn Wells.

Cross word puzzling became the thing to do, the raging topic of conversation, supplanting Coué, Mah Jong, and Bananas (first a slogan—now a fact!). With this impetus, the pastime's popularity radiated to other cities, and within a month the Cross Word Puzzle Book was ranked No. 4 on the national list of non-fiction best sellers. Three weeks later it advanced to third place, and the following month jumped into the lead, where it appears to remain indefinitely.

First a fad, then a best seller, the Cross Word Puzzle Book became an American institution, immortalized in cartoons by Briggs, prose-epics by Bob Benchley, and ballads by F. P. A.

[1]

Als opgave deze maand een kruistalpuzzel.
P = PRIEMGETAL.

Horizontaal:
1. De cijfers staan in dalende volgorde
4. P
5. P

Verticaal:
1. P
2. P
3. P

Diagonaal:
1. P
3. P

1	2	3
4		
5		

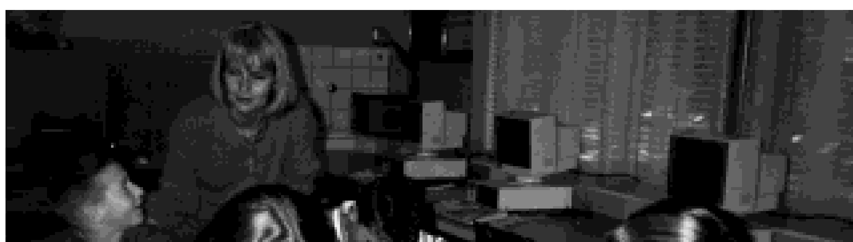
Na juiste invulling leest u in het diagram elk van de cijfers 1 t/m 9 precies een keer.
Als u de juiste oplossing binnen een maand inzendt verdient u 5 punten voor de ladderwedstrijd. Velen staan vlak onder de top, dus …

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan
Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag

INTERVIEW

'Ik wil de leerlingen zelf laten denken'

Martinus van Hoorn



Irene Dalm, 36 jaar, is sinds 3 jaar lerares aan het Develstein College te Zwijndrecht. Zij werkt dit jaar op de lokatie van het Develstein College in haar woonplaats Hendrik Ido Ambacht. Daar heeft ze twee brugklassen.
Voorheen heeft ze zes jaar in het (i)vbo gewerkt.

Hoe is de structuur van je school?
Het is een brede scholengemeenschap, met (i)vbo tot en met vwo. Er zijn vier lokaties, waarvan drie in Zwijndrecht, en 1750 leerlingen. Er zijn vijf soorten brugklassen, namelijk ivbo, vbo, mavo, mavo/havo en havo/vwo. In de tweede klas is er geen gecombineerde mavo/havo-groep meer.

Wat voor brugklassen heb je? Hoeveel uur per week heb je ze?
Ik heb een mavo/havo-klas en een havo/vwo-klas, elk vier uur per week. Verder ben ik mentrix van de havo/vwo-klas, die ik daardoor nog twee uur extra zie, voor studieles en: praten. Vanaf de kerstvakantie wordt dat laatste omgezet in studiebegeleiding. Dan heb ik leerlingen uit diverse klassen, die ik help met wiskunde.

Had je vorig jaar ook brugklassen? Doe je dit jaar hetzelfde als vorig jaar?
Vorig jaar had ik een havo/vwo-brugklas. Dit jaar doe ik ongeveer hetzelfde. Enkele tijdrovende opgaven laat ik weg; ik weet nu beter met welke opgaven ze thuis lang bezig zijn.

Hoe determineer je leerlingen voor de tweede klas?
Ze krijgen twee cijfers, een mavo-cijfer en een havo/vwo-cijfer. Dat werkt goed.

Welk boek hebben jullie? Hadden jullie dat boek voorheen ook al? Hoe hebben jullie het boek gekozen?
We hebben Netwerk, vroeger hadden we Getal & Ruimte. Netwerk kozen we vanwege de structuur in het boek, al is de methode wat oppervlakkiger, onderwerpen worden aangestipt en dan komt er weer een heel ander hoofdstuk.

Doe je dingen extra, naast het boek?
Ja, dat heb ik ook in Schotland gezien. Eén keer per maand besteed ik een hele les aan het rekenen. Daarvoor heb ik aparte bladen gemaakt, over breuken en negatieve getallen bijvoorbeeld.

Heb je tijdens de reis naar Schotland * meer dingen gezien die je kunt gebruiken?
Ja, het systematisch bijhouden van de vorderingen van de individuele leerlingen in één klas. Je kunt dan in een begeleidingsuur veel beter inspelen op de eigen problemen van leerlingen zonder de anderen die daar zitten op te houden. In Schotland hadden ze daarvoor een losbladig systeem, dat me goed bruikbaar leek.

Wat vind je het belangrijkste voor een wiskundeleraar?
Ik probeer de leerlingen altijd zelf te leren denken, zonder voor te zeggen. Leerlingen in het mavo en het vbo vragen vaak: hoe zit dat? Ik ga dan niet voorzeggen, ook vroeger op de vbo-school deed ik dat niet. Ik zit ook nooit vóór in de klas.

Noot

* Een verslag van deze Schotland-reis staat in het vorige nummer, Euclides 70-3.